

Часть III

**Синхронизация хаотических  
систем**



## Глава 13

# Полная синхронизация I: Основные свойства

В этой главе мы рассмотрим основные свойства полной синхронизации хаотических систем. Наш подход будет следующим: рассматривая как можно более простую систему, мы постараемся описать ее максимально подробно. Простейшей хаотической системой является одномерное отображение, его динамикой мы и займемся. Начнем мы с построения модели связанных отображений и с феноменологического описания полной синхронизации в этой системе. Наиболее интересным и нетривиальным эффектом является переход к полной синхронизации. Мы опишем два подхода к описанию этого перехода в хаосе. С одной стороны, используя стохастичность хаоса, мы дадим статистическое описание этого перехода. С другой стороны, учитывая детерминированность динамики, мы опишем переход в геометрических терминах как бифуркацию. Надеемся, что в результате читатель сможет убедиться в дополнении этих двух подходов, дающих в совокупности полную картину явления. В следующей главе, рассматривая обобщения простейшей модели, мы сможем убедиться, что основные свойства полной синхронизации остаются справедливыми для широкого класса хаотических систем.

Для понимания содержания этой главы требуется знакомство с основными понятиями теории хаоса, в частности с ляпуновскими показателями. При аналитическом статистическом описании мы используем термодинамический формализм, а при изложении геометрического подхода – теорию бифуркаций. Эти сведения можно най-

ти во многих учебниках по теории колебаний и хаосу [Guckenheimer and Holmes 1986; Бутенин и др. 1987; Неймарк и Ланда 1987; Рабинович и Трубецков 1989; Шустер 1988; Ott 1992; Kaplan and Glass 1995; Alligood *et al.* 1997; Кузнецов 2001], а также в монографиях [Badii and Politi 1997; Beck and Schlögl 1997].

### 13.1 Простейшая модель: два связанных отображения

В этом вводном разделе мы продемонстрируем явление полной синхронизации на примере простой модели связанных отображений.

Одномерное отображение

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (13.1)$$

задает динамическую систему с дискретным временем  $t = 0, 1, 2, \dots$  и непрерывным пространством состояний  $x$ . Широко известными примерами одномерных отображений с хаотическим поведением являются *логистическое отображение*  $f(x) = 4x(1-x)$  и *отображение типа тента*  $f(x) = 1 - 2|x|$ .

Рассмотрим два подобных отображения, заданных переменными  $x$  и  $y$ . Поскольку динамика каждой переменной хаотична, в случае независимых (невзаимодействующих) систем будут наблюдаться два независимых стохастических процесса, без каких-либо взаимных корреляций. Теперь введем взаимодействие. Сделать это можно многими способами: любой член в правой части уравнений, содержащий как  $x$ , так и  $y$ , даст какое-то взаимодействие. Потребуем, однако, чтобы взаимодействие удовлетворяло следующим важным физическим условиям:

- (i) взаимодействие должно быть притягивающим, т.е. оно должно сближать состояния  $x$  и  $y$ ;
- (ii) взаимодействие должно исчезать в синхронном симметричном режиме  $x = y$ .

Первое условие можно назвать также условием диссипативности, оно соответствует, например, связи электронных схем через сопротивления.<sup>1</sup> В общем виде линейный оператор, задающий связь с указанными свойствами, записывается как

<sup>1</sup> См. также обсуждение диссипативной и реактивной связи в разделе 8.2.

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ . В простейшем случае симметричной связи, полагая  $\alpha = \beta = \varepsilon$ , получим

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (13.3)$$

Линейное взаимодействие (13.3) должно быть применено к нелинейному отображению (13.1). Правильным способом применения является чередование линейного и нелинейного отображений, т.е. произведение<sup>2</sup> соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ f(y(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)f(x(t)) + \varepsilon f(y(t)) \\ \varepsilon f(x(t)) + (1 - \varepsilon)f(y(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Отметим, что получившаяся система (13.4) полностью симметрична по отношению к перестановке переменных  $x \leftrightarrow y$ , так как мы рассматриваем симметрично связанные идентичные системы.

Рассмотрим, какие качественно различные режимы могут наблюдаться в нашей базовой модели (13.4) при изменении положительного параметра связи  $\varepsilon$ . Легко понять, что происходит в предельных ситуациях. Если  $\varepsilon = 0$ , то переменные  $x$  и  $y$  полностью независимы и некоррелированы. Если  $\varepsilon = 1/2$ , то уже после одной итерации переменные  $x$  и  $y$  принимают одно и то же значение и остаются идентичными при всех  $t$  (поэтому  $\varepsilon = 1/2$  соответствует максимально сильной связи). Поскольку связь в этом режиме становится равной нулю, динамика переменных  $x$  и  $y$  такая же, как для автономной системы, т.е. хаотическая. Этот режим, при котором каждая из систем меняется во времени хаотически, а состояния систем в любой момент времени одинаковы, называется **полной синхронизацией** (по-английски «complete, full, identical»).

<sup>2</sup> В отличие от систем с непрерывным временем, в случае отображений нужно не прибавлять члены, описывающие различные эффекты, а перемножать их. Чтобы пояснить этот важный для понимания физического смысла дискретных моделей момент, рассмотрим два способа введения дополнительной диссипации в отображение (13.1). Диссипативный член должен уменьшать переменную  $x$ . Аддитивное слагаемое типа  $x(t+1) = f(x(t)) - \gamma x(t)$  не всегда уменьшает  $x$  — это зависит от знаков и значений  $f(x)$  и  $\gamma$ . В противоположность этому, умножение на множитель  $|\gamma| < 1$ , приводящее к  $x(t+1) = \gamma f(x(t))$ , всегда уменьшает абсолютное значение  $x$ .

При увеличении параметра связи  $\varepsilon$ , который можно рассматривать в качестве бифуркационного, в общем случае наблюдается сложная последовательность бифуркаций (при этом не исключены и нехаотические режимы), но четко прослеживается тенденция к все более полной корреляции между  $x$  и  $y$ . Можно найти такое критическое значение параметра связи  $\varepsilon_c < 1/2$ , при превышении которого,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ , устанавливается синхронное состояние  $x = y$ . Этот переход наиболее четко виден при представлении динамики на плоскости  $(x, y)$  (см. ниже рис. 13.2). Точки вне диагонали  $x = y$  соответствуют асинхронному состоянию. С увеличением  $\varepsilon$  точки концентрируются у диагонали и при превышения критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$  сосредотачиваются на ней.

#### Связанные отображения типа косой тент

Ниже мы проиллюстрируем эффект полной синхронизации на примере отображения типа косой тент

$$f(x) = \begin{cases} x/a & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ (1-x)/(1-a) & \text{при } a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (13.5)$$

(значению параметра  $a = 0.5$  соответствует обычное отображение типа тент, но эта симметричная ситуация, как будет показано ниже, является вырожденной). Отображение (13.5) показано на рис. 13.1, оно растягивает единичный интервал вдвое и складывает обратно. Результатом этих растяжений и складываний является развитый

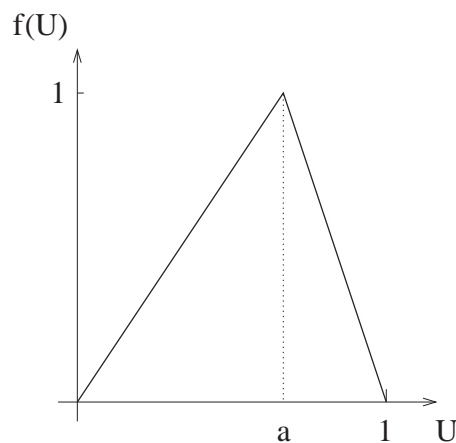


Рис. 13.1. Отображение типа косой тент: простая точно решаемая одномерная модель хаоса.

хаос, этим отображение типа тент отличается от логистического (параболического), в котором области хаоса и периодической динамики перемежаются (если менять параметр). Более того, инвариантная вероятностная мера в отображении типа тент постоянна, что позволит ниже в разделе 13.3 построить аналитическое статистическое описание.

Синхронный и асинхронный режимы показаны на рис. 13.2. Критическое значение параметра связи при  $a = 0.7$  равно  $\varepsilon_c \approx 0.228$  (это значение будет аналитически выведено ниже). Полная синхронизация, как на рис. 13.2а, наблюдается при сильной связи  $1/2 > \varepsilon > \varepsilon_c$ , асинхронный режим существует при более слабом взаимодействии (рис. 13.2б,с).

На рис. 13.3 показана динамика системы вблизи порога синхронизации, ее описанию будет посвящена большая часть этой главы. Для описания перехода к синхронизации при  $\varepsilon = \varepsilon_c$ , удобно перейти к новым переменным

$$U = \frac{x+y}{2}, \quad V = \frac{x-y}{2}. \quad (13.6)$$

Заметим, что в режиме полной синхронизации переменная  $V$  тождественно равна нулю; в почти синхронном режиме она мала. Геометрически, переменная  $U$  направлена вдоль диагонали  $x = y$ , а переменная  $V$  соответствует поперечному направлению. Для слабо асинхронного состояния вблизи  $\varepsilon_c$  характерны перемежающиеся всплески

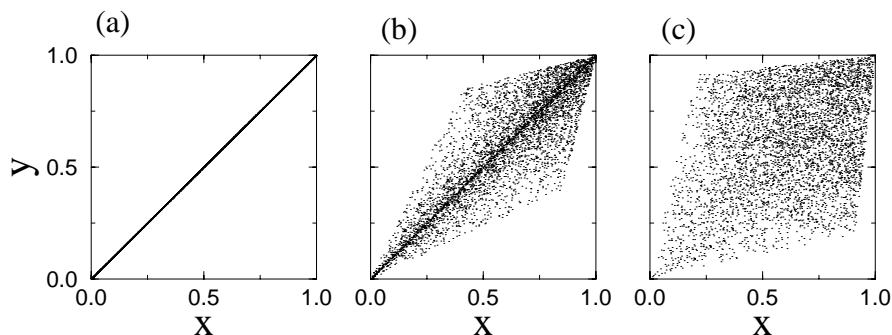


Рис. 13.2. Аттракторы в системе двух связанных отображениях типа косоугольного тента при  $a = 0.7$ . Порог синхронизации равен  $\varepsilon_c \approx 0.228$ . (а) Синхронный режим ( $\varepsilon = 0.3$ ) лежит на диагонали  $x = y$ . (б) Слабо асинхронное состояние сосредоточено вблизи нее. (с) При слабой связи ( $\varepsilon = 0.1$ ) мгновенные значения переменных  $x$  и  $y$  практически некоррелированы. Переход от (а) к (б) называют нарушением симметрии хаоса, или «взрывом» (blowout).

переменной  $V$ , как на рис. 13.3. Редкие, но большие выбросы  $V$  типичны для этой **модуляционной перемежаемости** (иногда ее называют «on – off» или «включено – выключено»). При теоретическом описании ниже будет показано, что естественной переменной для построения теории служит логарифм переменной  $|V|$ , поэтому динамика  $\ln |V|$  также представлена на рис. 13.3.

### 13.2 Устойчивость синхронного режима

В первую очередь отметим, что, поскольку система (13.4) симметрична по отношению к перестановке переменных (другими словами, она инвариантна по отношению к преобразованию  $x \leftrightarrow y$ ), синхронное состояние  $x(t) = y(t)$  является решением (13.4) при любых значениях параметра связи  $\varepsilon$ . Это означает, что симметричные начальные условия (т.е.  $x(0) = y(0)$  или  $V = 0$ ) остаются симметричными в процессе эволюции. Если же мы хотим, чтобы симметричное состояние наблюдалось не только при специальных, но и при произвольных начальных условиях, нужно дополнительно потребовать устойчивости этого состояния: полностью синхронный режим  $V = 0$  должен быть

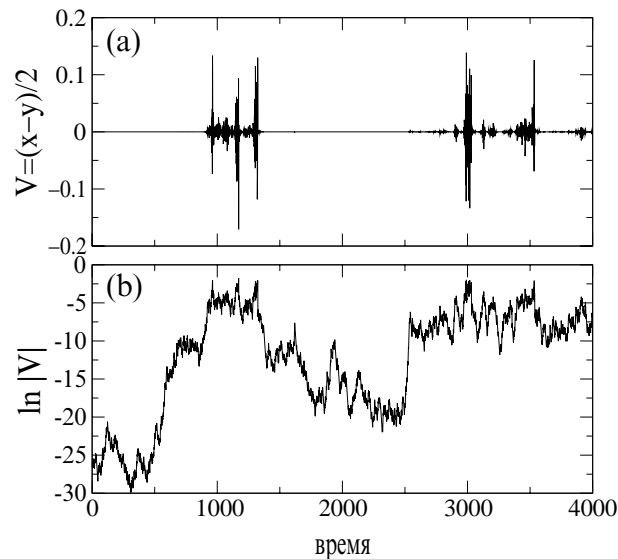


Рис. 13.3. Модуляционная перемежаемость в отображении типа косой тент при  $a = 0.7$  и докритической связи  $\varepsilon = \varepsilon_c - 0.001$ . (a) Всплески разности  $V$  между состояниями систем. (b) Логарифм разности ведет себя как случайные блуждания.



аттрактором, т.е. синхронное состояние должно устанавливаться и при асимметричных начальных условиях. Критическое значение параметра связи  $\varepsilon_c$ , при котором наступает синхронизация, вытекает из условия устойчивости. Поскольку  $V$  соответствует поперечному направлению, устойчивость синхронного состояния часто называют *поперечной* устойчивостью симметричного аттрактора.

Перепишем уравнения (13.4) в переменных  $U$  и  $V$  (13.6):

$$U(t+1) = \frac{1}{2}[f(U(t) + V(t)) + f(U(t) - V(t))], \quad (13.7)$$

$$V(t+1) = \frac{1-2\varepsilon}{2}[f(U(t) + V(t)) - f(U(t) - V(t))]. \quad (13.8)$$

Линеаризуя эту систему вблизи полностью синхронного состояния  $U(t)$ ,  $V = 0$  получим линейное отображение для малых возмущений  $u$  и  $v$

$$u(t+1) = f'(U(t))u(t), \quad (13.9)$$

$$v(t+1) = (1-2\varepsilon)f'(U(t))v(t). \quad (13.10)$$

Эту линейную систему следует итерировать параллельно с нелинейным отображением, задающим синхронную хаотическую динамику

$$U(t+1) = f(U(t)). \quad (13.11)$$

Поскольку в линейном приближении уравнения для возмущений  $u$  и  $v$  независимы, продольные (т.е. симметричные,  $u$ ) и поперечные (асимметричные,  $v$ ) возмущения не взаимодействуют, и их можно рассматривать по отдельности. В основе дальнейшего рассмотрения лежит наблюдение, что линеаризованные уравнения (13.9) и (13.10) описывают рост и убывание возмущений хаотического режима, и количественно этот рост (или убывание) задаются ляпуновским показателем системы. Действительно, для двумерного отображения можно определить два ляпуновских показателя, и поскольку в нашем случае переменные  $u$  и  $v$  независимы, эти показатели просто определяются средними логарифмами показателей роста  $u$  и  $v$ :

$$\lambda_u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |u(t)| - \ln |u(0)|}{t} = \langle \ln |f'(U)| \rangle, \quad (13.12)$$

$$\lambda_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |v(t)| - \ln |v(0)|}{t} = \ln |1-2\varepsilon| + \langle \ln |f'(U)| \rangle. \quad (13.13)$$

Используя эргодичность хаоса, мы можем заменить среднее по времени статистическим средним по инвариантной мере, последнее будем обозначать скобками  $\langle \rangle$ . Из уравнения (13.9) следует, что симметричное возмущение  $u$  есть не что иное как возмущение в хаотическом отображении (13.11), так что продольный (не нарушающий

синхронизацию) ляпуновский показатель  $\lambda_u$  есть не что иное как ляпуновский показатель одиночной системы  $\lambda$ . Поперечный ляпуновский показатель  $\lambda_{\perp} \equiv \lambda_v$  выражается через  $\lambda$  по формуле

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \lambda. \quad (13.14)$$

Таким образом, средний рост (или убывание) поперечных возмущений  $v$  определяется поперечным показателем  $\lambda_{\perp}$ :  $\ln |v(t)| \propto \lambda_{\perp} t$ , и критерий устойчивости синхронного состояния формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} > 0: & \text{ синхронное состояние неустойчиво,} \\ \lambda_{\perp} < 0: & \text{ синхронное состояние устойчиво.} \end{aligned}$$

Порог устойчивости находится из условия  $\lambda_{\perp} = 0$ :

$$\ln |1 - 2\varepsilon_c| = -\lambda, \quad \varepsilon_c = \frac{1 - e^{-\lambda}}{2}. \quad (13.15)$$

Например, для логистического отображения ляпуновский показатель равен  $\lambda = \ln 2$ , так что  $\varepsilon_c = 1/4$ . Выше мы рассматривали устойчивость в среднем, т.е. определяемую средним показателем роста возмущений. Соотношение этого определения устойчивости с другими возможными определениями (например, с асимптотической устойчивостью) весьма нетривиально и является основным предметом дальнейшего обсуждения.

### 13.3 Статистическая теория перехода к синхронизации

В этом разделе мы дадим статистическое описание явлений вблизи порога синхронизации. Основная идея состоит в представлении эволюции поперечного возмущения  $v$  динамикой процесса, вынуждаемого случайной силой, т.е. мы рассматриваем синхронный хаос как случайный процесс. При этом мы пренебрегаем практически всеми динамическими (детерминированными) чертами хаоса – не удивительно, что теория работает тем лучше, чем сильнее хаос. Результаты этого теоретического подхода мы проиллюстрируем на примере отображения типа кривой тента.

## 13.3.1 Возмущение как случайное блуждание

Из анализа устойчивости проведенного в разделе 13.2 следует, что подходящей переменной для описания динамики поперечных возмущений вблизи порога синхронизации является логарифм возмущения. Поэтому удобно ввести новые переменные, не независимые, но полезные

$$w = |v|, \quad z = \ln w.$$

Кроме того, поскольку поперечный ляпуновский показатель  $\lambda_{\perp}$  полностью определяет линейную устойчивость и однозначно связан с параметром связи  $\varepsilon$ , удобно использовать его в качестве бифуркационного параметра. Тогда уравнение для динамики возмущений примет вид

$$w(t+1) = w(t)e^{\lambda_{\perp}} e^{g(U(t))}. \quad (13.16)$$

Здесь введено обозначение<sup>3</sup>

$$g(U(t)) = \ln |f'(U)| - \lambda. \quad (13.17)$$

Заметим, что среднее от  $g$  равно нулю, но мгновенные значения  $g$  отличны от нуля. Уравнения (13.17) и (13.16) допускают следующую интерпретацию: хаотический процесс  $U(t)$  действует как внешняя сила на переменную  $w$  в (13.16). Внешняя сила входит в множитель  $\exp(g + \lambda_{\perp})$ . Можно сказать, что фактор  $\exp(g + \lambda_{\perp})$  модулирует показатель роста величины  $w$ : она растет быстрее, если этот множитель большой, и медленнее, если он мал.

Уравнение для переменной  $z$  следует непосредственно из (13.16):

$$z(t+1) = z(t) + g(U(t)) + \lambda_{\perp}. \quad (13.18)$$

Внешняя сила входит сюда как аддитивное слагаемое  $g + \lambda_{\perp}$ .

Отметим, что с математической точки зрения системы, составленные из уравнений (13.11) и (13.16) или (13.18), есть так называемые *косые системы*: переменная  $U$  влияет на  $w$  и  $z$ , но обратного влияния  $w$  и  $z$  на  $U$  нет. Для связанных отображений (13.4) косая система получается приближенно, как результат линеаризации вблизи полностью синхронного режима. Косые системы, однако, естественным образом возникают в физических ситуациях с однонаправленной связью (см. раздел 14.1). С физической точки зрения уравнения (13.11),

<sup>3</sup> Это позволит записать уравнение в наиболее общем виде, пригодном для описания не только перехода к синхронизации, но и других случаев модуляционной неустойчивости.

(13.16) и (13.18) задают вынужденные колебания: компонента  $U$  определяет вынуждающую силу, которая действует на компоненты  $w, z$ . Особенностью (13.11), (13.16) и (13.18) является то, что сила действует на линейную подсистему (13.16) и (13.18).

Статистическое описание синхронизации основано на представлении внешней силы в (13.16) и (13.18) как стохастического процесса. Таким образом, хаотический сигнал  $U(t)$  рассматривается как шум, а уравнения (13.16) и (13.18) интерпретируются как уравнения соответственно с мультипликативным и аддитивным шумом. При такой интерпретации становится очевидным, что (13.18) описывает одномерные случайные блуждания со случайным шагом  $g + \lambda_{\perp}$ . Среднее значение флуктуирующего члена  $g$  равно нулю, поэтому направление среднего смещения целиком определяется поперечным ляпуновским показателем  $\lambda_{\perp}$ . При  $\lambda_{\perp} < 0$  среднее смещение отрицательно, и переменные  $z$  и  $w$  убывают (в среднем), а при  $\lambda_{\perp} > 0$  эти переменные в среднем растут. На пороге синхронизации (13.15) среднее смещение случайных блужданий равно нулю. Таким образом, величина  $\lambda_{\perp}$  характеризует направленную компоненту случайных блужданий. Другой важной характеристикой является коэффициент диффузии. Если бы значения  $g(U(t))$  были независимыми случайными величинами, то коэффициент диффузии, согласно закону больших чисел, был бы равен дисперсии  $g$ . В нашем случае процесс  $U(t)$  задается динамической системой (13.1), поэтому значения  $g(U(t))$  могут быть коррелированы, и необходимо более детальное рассмотрение динамики случайных блужданий.

### 13.3.2 Диффузия определяется статистикой локальных по времени ляпуновских показателей

Решение уравнения (13.18) можно формально записать как

$$z(T) - z(0) - \lambda_{\perp} T = \sum_{t=0}^{T-1} g(U(t)). \quad (13.19)$$

В правой части стоит сумма хаотических величин; чтобы иметь возможность применить центральную предельную теорему, мы разделим эту сумму на  $T$  и обозначим

$$\Lambda_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} g(U(t)) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(U)| - \lambda. \quad (13.20)$$

Величина  $\Lambda_T$  называется *локальным по времени* (или просто локальным) ляпуновским показателем (в нашей формулировке (13.20) эта величина сдвинута на  $\lambda$  и поэтому стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$ ; можно определить и не сдвинутый локальный по времени показатель, который стремится к  $\lambda$  при  $T \rightarrow \infty$ ). При больших  $T$  локальный по времени показатель  $\Lambda_T$  стремится к нулю, но для нас важны его флуктуации. Согласно центральной предельной теореме, плотность вероятностного распределения  $\Lambda_T$  (для простоты ниже мы будем опускать индекс  $T$ ) должна вести себя как

$$p(\Lambda; T) \propto \exp[Ts(\Lambda)], \quad (13.21)$$

где в показателе стоит энтропийная функция  $s(\Lambda)$  (см. [Paladin and Vulpiani 1987; Ott 1992; Crisanti *et al.* 1993]). Эта выпуклая функция имеет единственный максимум в нуле. Ведущий член в разложении вокруг этого максимума  $s(\Lambda) \approx -\Lambda^2/(2D)$  дает гауссовское распределение  $\Lambda$ . Коэффициент  $D$  определяет ширину распределения локальных по времени ляпуновских показателей  $\Lambda$ ; дисперсия  $\Lambda$  убывает со временем  $T$  согласно закону больших чисел:

$$\langle \Lambda^2 \rangle \approx \frac{D}{T}.$$

Поскольку поперечная переменная  $z$  в (13.19) просто выражается через локальный по времени показатель

$$z(T) - z(0) - \lambda_{\perp} T = \Lambda T,$$

получается, что  $z$  растет с коэффициентом диффузии  $D$ :

$$\langle (z(T) - \langle z(T) \rangle)^2 \rangle \propto TD.$$

Преимуществом общей формулировки (13.21) является возможность правильного описания больших отклонений локальных по времени показателей. Действительно, в гауссовском приближении возможны сколь угодно большие локальные показатели, в то время как на самом деле область определения функции  $s$  ограничена (см. ниже пример с отображением типа кривой тента). В нелинейной динамике подход, основанный на введении энтропийной функции, называют *термодинамическим формализмом* [Ott 1992; Crisanti *et al.* 1993; Badii and Politi 1997; Beck and Schlögl 1997]; в математической литературе говорят о *теории больших отклонений* [Varadhan 1984].

Вернемся к динамике поперечных возмущений (13.18). Вблизи порога синхронизации среднее смещение случайных блужданий переменной  $z$  мало; поэтому динамика определяется в основном флуктуациями. Распределение  $z$  становится со временем все шире, так

что могут наблюдаться как малые, так и большие значения  $z$ . Если перейти от логарифма возмущений  $z$  к самим возмущениям  $w$ , то мы увидим, что величины  $w = \exp(z)$  могут принимать как очень большие, так и очень маленькие значения. Таким образом, случайные блуждания  $z$  проявляются как всплески поперечных возмущений  $w$ . Этот режим, показанный на рис. 13.3, называют **модуляционной перемежаемостью** [Fujisaka and Yamada 1985, 1986; Yamada and Fujisaka 1986; Platt *et al.* 1989]).

Подчеркнем, что основным источником этой перемежаемости являются флуктуации локального по времени поперечного ляпуновского показателя. В некоторых исключительных случаях, когда эти флуктуации отсутствуют, наблюдаемый режим отличается от модуляционной перемежаемости. В частности, в симметричном отображении типа тент  $f(U) = 1 - 2|U|$  локальные мультипликаторы равны двум и не зависят от  $U$ . Подобным свойством обладает и логистическое отображение  $f(U) = 4U(1 - U)$ : здесь флуктуации локального по времени ляпуновского показателя при больших  $T$  исчезают. Переход к синхронизации в этих системах имеет свои особенности, описание которых можно найти в статьях [Кузнецов и Пиковский 1989; Pikovsky and Grassberger 1991].

Для более полного анализа модуляционной перемежаемости у порога установления полной синхронизации линейного приближения недостаточно. Мы не будем рассматривать специальные случаи симметричного отображения типа тент и логистического отображения, а обсудим общий случай флуктуирующих локальных по времени ляпуновских показателей.

### 13.3.3 Модуляционная перемежаемость: степенные распределения

С помощью локальных по времени ляпуновских показателей мы можем переписать уравнение для эволюции возмущения  $z$  (13.18) в виде

$$z(t + T) = z(t) + T\lambda_{\perp} + T\Lambda.$$

При больших  $T$  корреляциями последовательных значений  $\Lambda_T$  можно пренебречь и рассматривать эти величины как независимые. Это позволяет записать уравнение для плотности распределения  $W(z; t)$ : плотность в момент времени  $t + T$  есть свертка двух плотностей:

$$W(z; t + T) = \int d\Lambda p(\Lambda; T)W(z - T\lambda_{\perp} - T\Lambda; t).$$

Будем искать статистически стационарное (не зависящее от времени) решение с помощью подстановки

$$W(z) \propto \exp(\kappa z). \quad (13.22)$$

Подставляя и используя (13.21), получим

$$1 = \int d\Lambda p(\Lambda; T) e^{-T\kappa(\lambda_{\perp} + \Lambda)} \propto \int d\Lambda e^{Ts(\Lambda) - T\kappa\lambda_{\perp} - T\kappa\Lambda}. \quad (13.23)$$

Последний интеграл можно оценить при больших  $T$ , беря максимум выражения в показателе экспоненты:

$$\int d\Lambda e^{Ts(\Lambda) - T\kappa\lambda_{\perp} - T\kappa\Lambda} \propto \exp[T(s(\Lambda^*) - \kappa\Lambda^* - \kappa\lambda_{\perp})],$$

где величина  $\Lambda^*$  определяется из условия максимума

$$\frac{ds(\Lambda^*)}{d\Lambda} = \kappa.$$

Подставляя эти два выражения в (13.23), получим уравнение для  $\Lambda^*$

$$s(\Lambda^*) - (\Lambda^* + \lambda_{\perp}) \frac{ds(\Lambda^*)}{d\Lambda} = 0, \quad (13.24)$$

из которого находится показатель вероятностного распределения  $\kappa$ . Читатели, знакомые с термодинамическим формализмом, сразу узнают обычные формулы преобразования Лежандра (а остальные могут прочитать об этом в любом учебнике по статистической механике или в книге [Ott 1992], где этот метод применяется в хаотической динамике).

Заметим, что энтропийная функция  $s(\Lambda)$  в (13.24) описывает флуктуации локального по времени мультипликатора симметричного хаотического режима и не зависит от параметра связи  $\varepsilon$ . Зависимость от  $\varepsilon$  входит в (13.24) только через поперечный ляпуновский показатель  $\lambda_{\perp}$ . Поскольку  $s(0) = s'(0) = 0$ , в критической точке, в которой поперечный ляпуновский показатель  $\lambda_{\perp}$  меняет знак, меняет знак и показатель  $\kappa$ . При малых  $\lambda_{\perp}$  показатель  $\kappa$  линейно зависит от  $\lambda_{\perp}$ . Как вытекает из (13.14), зависимость  $\kappa$  от  $\varepsilon - \varepsilon_c$  также линейна.

Для возмущения  $w$  стационарное распределение (13.22) имеет степенной вид

$$W(w) \propto w^{\kappa-1}. \quad (13.25)$$

Как и любая степенная функция, это распределение не нормируемо. Как уже отмечалось, показатель  $\kappa$  меняет знак на пороге синхронизации (13.15). Поэтому распределение (13.25) расходится при  $w \rightarrow 0$

в режиме полной синхронизации (когда  $\kappa < 0$ ), а при малой связи, когда синхронный режим неустойчив и  $\kappa > 0$ , расходимость имеет место при  $w \rightarrow \infty$ . Чтобы получить нормируемое распределение, нужно добавить к линейному отображению (13.16) дополнительные члены.

*До порога синхронизации,  $\varepsilon < \varepsilon_c$*

Расходимость при  $w \rightarrow \infty$  появилась из-за того, что мы пренебрегли эффектом насыщения неустойчивости в системе (13.9), (13.10). Ясно, что разность  $x - y$  не может расти неограниченно, поскольку аттрактор системы связанных отображений расположен в конечной области фазового пространства. В общем случае для описания насыщения необходимо учитывать нелинейные члены в обоих уравнениях (13.9) и (13.10). Такой теории пока не существует. В качестве упрощенной модели рассмотрим линейное уравнение (13.18), в котором эффект насыщения моделируется верхней границей  $z = z_{\max} = \ln w_{\max}$ , от которой случайные блуждания «отражаются». Распределение (13.25), таким образом, обрезается при  $w_{\max}$ .

С учетом этого обрезания плотность распределения (13.25) нормируется:

$$W(w) = \begin{cases} \kappa w_{\max}^{-\kappa} w^{\kappa-1} & \text{при } w \leq w_{\max}, \\ 0 & \text{в обратном случае.} \end{cases}$$

Из этого соотношения легко получить моменты возмущения  $w$ :

$$\langle w^q \rangle = \frac{\kappa}{q + \kappa} w_{\max}^q.$$

На пороге синхронизации все моменты обращаются в ноль, а для малых отклонений от порога все они растут линейно по параметру  $\varepsilon_c - \varepsilon$  (поскольку  $\kappa$  линейно зависит от ляпуновского показателя  $\lambda_{\perp}$ ). Такое поведение в критической точке довольно необычно; оно связано со степенной формой вероятностного распределения.

#### *Численная ловушка для идентичных систем*

Интересный эффект можно наблюдать при численном моделировании связанных идентичных отображений (13.4). Полная синхронизация может наблюдаться даже при тех значениях параметров, когда поперечный ляпуновский показатель положителен. Причиной этой



«неустойчивой» синхронизации является ограниченная точность вычислений. Действительно, если при численном моделировании симметричных подсистем их состояния в какой-то момент времени совпадают в компьютерном представлении (т.е. с точностью до последней значащей цифры), то при дальнейшей эволюции это совпадение сохранится, и будет наблюдаться полная синхронизация. Например, на обычных компьютерах двойная точность соответствует примерно пятнадцати десятичным разрядам. Если возмущение  $w$  окажется в момент времени  $t_0$  меньше, чем  $10^{-15}$ , то при всех  $t > t_0$  возмущение будет тождественно равно нулю,  $w \equiv 0$ , что выглядит как полная синхронизация. В терминах случайного блуждания логарифма возмущения  $z$  этот эффект можно интерпретировать как наличие поглощающей границы при  $z_{\min} = \ln(10^{-15})$ : как только случайное блуждание достигает этой границы, оно «прилипает» к ней. Вблизи порога синхронизации вероятность достичь  $z_{\min}$  не мала, и такая «неустойчивая» синхронизация якобы наблюдалась авторами ряда публикаций. Этого численного артефакта можно избежать введением малой неидентичности систем (например, путем рассогласования параметров). Помогает и добавление дополнительного внешнего шума, который, конечно, должен быть разным для обеих подсистем.

#### Выше порога синхронизации, $\varepsilon > \varepsilon_c$

Расходимость при  $w \rightarrow 0$  и означает полную синхронизацию (так что фактически распределение сжимается в дельта-функцию), поэтому в идеальном симметричном случае степенное распределение (13.25) при сильной связи не наблюдается. Однако оно появляется при отклонениях от полной симметрии, вследствие следующих факторов.

- (i) **Неидентичность.** Если взаимодействующие системы слегка отличаются, то идеальная синхронизация невозможна. В случае немного различающихся отображений мы можем вместо (13.4) записать

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(y(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)f_1(x(t)) + \varepsilon f_2(y(t)) \\ \varepsilon f_1(x(t)) + (1-\varepsilon)f_2(y(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Теперь в переменных (13.6) получаем

$$U(t+1) = \frac{1}{2}[f_1(U(t) + V(t)) + f_2(U(t) - V(t))], \quad (13.27)$$

$$V(t+1) = \frac{1-2\varepsilon}{2} [f_1(U(t)+V(t)) - f_2(U(t)-V(t))]. \quad (13.28)$$

Симметричное состояние  $V = 0$  не является более решением этих уравнений, но при малой расстройке можно ожидать, что  $V$  мало. Пренебрегая влиянием малого возмущения  $v$  на динамику переменной  $U$ , перепишем уравнение (13.28) в виде

$$v(t+1) = \frac{(1-2\varepsilon)}{2} [(f_1'(U) + f_2'(U))v + (f_1(U) - f_2(U))]. \quad (13.29)$$

Основное отличие от идеально симметричной ситуации (13.10) – в последнем неоднородном члене в правой части уравнения. Он пропорционален расстройке, и мы будем считать, что этот хаотический член мал, порядка  $\delta \ll 1$ . Тогда динамику можно качественно описать следующим образом. Если разность состояний  $v$  превышает  $\delta$ , то неоднородный член не важен, и мы получаем случайное блуждание, описываемое уравнением (13.18). Когда разность становится порядка  $\delta$ , неоднородный член действует как случайная сила, препятствующая уменьшению  $v$  до значений, меньших, чем  $\delta$ . Для случайного блуждания переменной  $z$  это соответствует отражающей границе при  $z \approx \ln \delta$ . При такой границе случайные блуждания происходят в области  $z > \ln \delta$  даже при отрицательном среднем смещении  $\lambda_{\perp} < 0$ . Это означает, что выбросы  $v$  наблюдаются и в синхронном режиме с отрицательным поперечным ляпуновским показателем. Другими словами, синхронизованный хаос оказывается чрезвычайно чувствительным к возмущениям: даже малая расстройка приводит к большим (хотя, возможно, и редким) всплескам.

- (ii) **Шум.** Шум действует на связанные отображения точно так же, как и расстройка: он приводит к малым поперечным возмущениям даже тогда, когда полностью синхронный режим устойчив. Справедливы те же утверждения, что и в предыдущем случае, только  $\delta$  теперь есть интенсивность шума.

Оба указанных фактора приводят к тому, что распределение вероятностей имеет нижнюю границу  $w_{\min}$ , примерно соответствующую уровню шума и/или расстройке. Степенной хвост распределения при больших  $w$  означает, что вероятность наблюдения больших отклонений от полностью синхронного состояния относительно велика (по сравнению, например, с гауссовским распределением, при котором вероятность больших отклонений экспоненциально мала). Это еще

одно проявление чувствительности к возмущениям, которая выражается в больших спорадических выбросах. Мы увидим в разделе 13.4, что эта чувствительность связана с нетривиальной топологической структурой аттрактора и его области притяжения в фазовом пространстве.

*Пример: связанные отображения типа косо́й тент*

Мы видели, что статистика переменной  $z$  определяется статистикой флуктуаций локального по времени ляпуновского показателя, а последний в свою очередь описывается энтропийной функцией  $s(\Lambda)$ . В качестве примера приложения теории рассмотрим отображение типа косо́й тент (13.5). Поскольку инвариантное распределение вероятностей для отображения типа косо́й тент (13.5) постоянно на интервале  $(0, 1)$ , а посещения областей  $(0, a)$  и  $(a, 1)$  не коррелированы, получаем

$$|\ln f'| = \begin{cases} -\ln a & \text{с вероятностью } a, \\ -\ln(1-a) & \text{с вероятностью } (1-a). \end{cases}$$

Следовательно, ляпуновский показатель есть

$$\lambda = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a). \quad (13.30)$$

Таким образом, мы получаем случайные блуждания с шагами двух типов:

$$\begin{aligned} -\ln a - \lambda & \quad \text{с вероятностью } a, \\ -\ln(1-a) - \lambda & \quad \text{с вероятностью } (1-a). \end{aligned}$$

Для  $p(\Lambda, T)$  получаем биномиальное распределение. Обозначая число итераций с  $U < a$  через  $n$  и полагая  $h = n/T$ , получим из биномиального распределения

$$p(n, T) = \frac{T!}{n!(T-n)!} a^n (1-a)^{T-n}$$

и из соотношения

$$\Lambda = \frac{n}{T}(-\ln a) + \frac{T-n}{T}(-\ln(1-a)) - \lambda,$$

с использованием формулы Стирлинга, энтропийную функцию  $s(\Lambda)$  в параметрическом представлении:

$$s(h) = h \ln \frac{a}{h} + (1-h) \ln \frac{1-a}{1-h},$$

$$\Lambda(h) = -h \ln a - (1 - h) \ln(1 - a) - \lambda.$$

Легко убедиться, что энтропийная функция (рис. 13.4а) имеет единственный максимум в нуле.

Используя основную формулу (13.24), можно представить показатель  $\kappa$  и поперечный показатель Ляпунова  $\lambda_{\perp}$  в параметрическом виде как функции  $h$ :

$$\kappa = \frac{ds}{d\Lambda} = \frac{ds/dh}{d\Lambda/dh} = \ln\left(\frac{1-h}{h}\right) / \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) - 1,$$

$$\lambda_{\perp} = -\Lambda(h) + s(h)/\kappa.$$

Зависимость показателя  $\kappa$  от поперечного ляпуновского показателя показана на рис. 13.4б. Прежде чем обсуждать эту функцию, мы подтвердим справедливость степенного закона (13.22) вычислениями, представленными на рис. 13.5.

Из рис. 13.4 видно, что нетривиальный степенной закон справедлив только в некоторой окрестности критической точки перехода к синхронизации. Причиной этого является конечность области определения энтропийной функции  $s(\Lambda)$

$$-\ln a - \lambda \leq \Lambda \leq \ln(1 - a) - \lambda. \tag{13.31}$$

Эта конечность есть общее свойство динамических систем, она исчезает при использовании параболического приближения для  $s$ . Действительно, параболическое приближение приводит к гауссовскому распределению локальных по времени ляпуновских показателей. Хвосты этого распределения простираются до бесконечности,

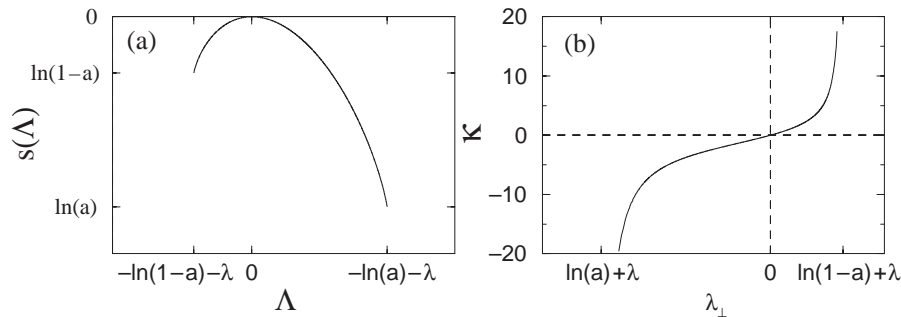


Рис. 13.4. Энтропийная функция, описывающая флуктуации локальных по времени ляпуновских показателей, (а) и показатель  $\kappa$  (б) как функция поперечного ляпуновского показателя для отображения типа косой тент. Отметим, что, согласно (13.14),  $\lambda_{\perp} = \ln|1 - 2\varepsilon| + \lambda$ .

что соответствует бесконечно большим локальным неустойчивостям (либо бесконечно сильной устойчивости). Однако линейный анализ возмущений вблизи траекторий динамической системы приводит к уравнениям с ограниченными коэффициентами, так что в реальных динамических системах локальные по времени ляпуновские показатели не могут быть сколь угодно большими.

Ввиду ограниченности локальных по времени ляпуновских показателей, показатель  $\kappa$  как функция от  $\lambda_{\perp}$  определен только на интервале (13.31). Легко видеть, что минимум и максимум локального ляпуновского показателя  $\Lambda$  соответствуют минимальному и максимальному локальному мультипликатору отображения типа тент, т.е. значениям  $-\ln(1-a)$  и  $-\ln a$ . В области (13.31) поперечная динамика нетривиальна в том смысле, что есть поперечно устойчивые и поперечно неустойчивые траектории. Вне этого интервала либо все траектории неустойчивы, либо все устойчивы, и степенные хвосты

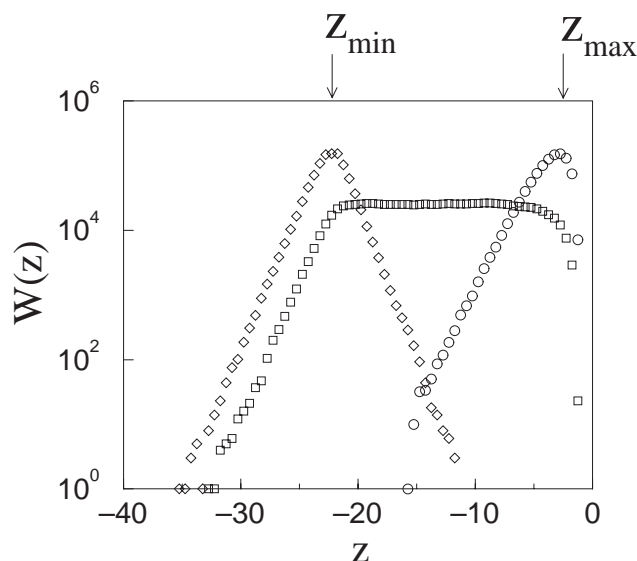


Рис. 13.5. Экспоненциальное распределение величины  $z$  (этому соответствует степенное распределение  $w$ ) для связанных отображений типа косой тент для трех значений параметра связи: при критическом значении  $\varepsilon = \varepsilon_c$  (квадраты  $\square$ ); при докритическом  $\varepsilon = \varepsilon_c - 0.025$  (круги  $\circ$ ); при закритической связи  $\varepsilon = \varepsilon_c + 0.025$  (ромбы  $\diamond$ ). В систему была дополнительно введена расстройка  $a \pm 10^{-10}$ , обеспечивающая ограничение функции распределения на нижнем пределе  $z_{\min}$ . В области  $z_{\min} < z < z_{\max}$  распределения с хорошей точностью соответствуют экспоненциальному закону в соответствии с выражением (13.22).

распределения не существуют (в терминах случайного блуждания: все шаги направлены в одну сторону). Мы обсудим эту ситуацию с другой точки зрения в разделе 13.4.

### 13.3.4 Модуляционная перемежаемость: корреляционные свойства

Вблизи порога полной синхронизации динамика разности между состояниями подсистем демонстрирует перемежаемость: всплески разделены длинными периодами молчания (рис. 13.3). Качественное описание этой модуляционной перемежаемости было дано выше: логарифм возмущения ведет себя как случайные блуждания, наибольшие отклонения которых видны как относительно острые пики.

Аналогию со случайными блужданиями можно использовать и для количественного описания свойств временной корреляции модуляционной перемежаемости. Для этого удобно использовать вместо дискретных по времени случайных блужданий переменной  $z$  диффузионный процесс с непрерывным временем, со средней скоростью смещения  $\lambda_{\perp}$  и коэффициентом диффузии  $D$ . Отметим, что средняя скорость зависит от параметра связи, в то время как коэффициент диффузии определяется только параметрами одиночного отображения. Диффузионный процесс описывается уравнением Фоккера-Планка (см. [Феллер 1984]):

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = -\lambda_{\perp} \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(z, t)}{\partial z^2}. \quad (13.32)$$

Это уравнение нужно дополнить граничными условиями. Как обсуждалось выше, и нелинейное насыщение, и малый шум или расстройка приводят к отражающим границам соответственно при  $z_{\max}$  и  $z_{\min}$ .

Определим теперь статистику временных интервалов между двумя всплесками модуляционной перемежаемости под порогом синхронизации,  $\varepsilon < \varepsilon_c$ . В этом случае достаточно учесть только отражающую границу при  $z_{\max}$ . Всплеск наблюдается, если переменная  $z$  близка к  $z_{\max}$ . Чтобы оценить время до следующего всплеска, возьмем некоторое значение  $z_0 < z_{\max}$  и найдем среднее время, за которое случайное блуждание достигнет  $z_{\max}$ . На языке теории случайных процессов это задача о первом достижении границы. Для диффузионных процессов, описываемых уравнением Фоккера-Планка (13.32), распределение времен достижения границы хорошо изучено (см.,

например, [Феллер 1984]). Таким образом получается распределение интервалов между всплесками

$$W(\tau) = \frac{|z_{\max} - z_0|}{\sqrt{2\pi D\tau^3}} \exp\left(-\frac{(z_{\max} - z_0 - \lambda_{\perp}\tau)^2}{2D\tau}\right). \quad (13.33)$$

Вблизи порога, когда интервалы между всплесками велики, можно записать для больших  $\tau$

$$W(\tau) \propto \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda_{\perp}^2}{2D}\tau\right).$$

Это распределение имеет вид степенного закона, обрезанного на верхней границе  $\tau^* \sim D\lambda_{\perp}^{-2}$ . Интервалы между всплесками могут быть очень большими, средняя продолжительность «ламинарных» фаз<sup>4</sup>

$$\langle\tau\rangle = \frac{z_{\max} - z_0}{\lambda_{\perp}}$$

расходится на пороге  $\lambda_{\perp} = 0$ .

Предполагая статистическую независимость интервалов между всплесками и используя функцию распределения этих интервалов, можно найти спектр мощности процесса  $S(\zeta)$ . Обозначив преобразование Фурье от плотности (13.33) через  $\theta(\zeta)$ , получим, согласно общей теории [Рытов 1988],

$$S(\zeta) \propto \operatorname{Re} \frac{\theta(\zeta)}{1 - \theta(\zeta)}.$$

К счастью, возникающие интегралы могут быть вычислены аналитически и в пределе  $z_{\max} - z_0 \rightarrow 0$  получается степенной спектр модуляционной перемежаемости:

$$S(\zeta) \propto \zeta^{-1/2} \quad \text{при} \quad D \gg \zeta \gg D\lambda_{\perp}^{-2}.$$

В завершение обсуждения статистических свойств модуляционной перемежаемости отметим, что все рассмотрение полностью применимо и к системам, модуляционно возбуждаемым мультипликативным шумом. Обычно подобные системы рассматриваются в непрерывном времени, при этом переход от состояния равновесия к макроскопическим колебаниям называют неравновесным фазовым переходом, индуцированным шумом (см. [Хорстхемке и Лефевр 1989] и содержащиеся там ссылки).

<sup>4</sup> Можно найти и другие моменты распределения (13.33), см. [Fujisaka *et al.* 1997].

### 13.4 Переход к синхронизации: геометрическое рассмотрение

В этом разделе мы обсудим переход к полной синхронизации с геометрической точки зрения путем описания объектов в фазовом пространстве и их бифуркаций. Переход, изображенный на рис. 13.2, можно рассматривать как переход от полностью симметричного аттрактора, лежащего на диагонали  $x = y$ , к несимметричному, лежащему в некоторой окрестности диагонали (под асимметрией мы понимаем  $x(t) \neq y(t)$ ; распределение вероятностей на плоскости  $(x, y)$  может оставаться симметричным, как на рис. 13.2). Этот переход можно интерпретировать как бифуркацию странного аттрактора. Нашей целью является установление связи этого перехода с бифуркациями отдельных траекторий. Удобно рассматривать неустойчивые *периодические* траектории, поскольку они образуют скелет хаотического множества. Они плотны на хаотическом аттракторе и многие характеризующие хаос величины (например, инвариантная мера, максимальный ляпуновский показатель) могут быть выражены через периодические траектории.<sup>5</sup> Преимуществом такого представления служит возможность использовать результаты обычной теории бифуркаций (см., например, [Йосс и Джозеф 1983; Guckenheimer and Holmes 1986; Hale and Коçак 1991]), поскольку они непосредственно применимы к периодическим орбитам.

#### 13.4.1 Поперечные бифуркации периодических траекторий

В качестве исходного состояния мы выберем полностью синхронное состояние (т.е.  $\varepsilon \approx 1/2$ ) и будем исследовать нарушение симметрии, последовательно уменьшая параметр связи  $\varepsilon$ . Рассмотрим сначала простейшую периодическую траекторию – состояние равновесия. Неподвижной точке  $x^*$  отображения  $x \rightarrow f(x)$  соответствует синхронное состояние равновесия  $x(t) = y(t) = x^*$ , существующее при всех  $\varepsilon$ . Устойчивость этого состояния равновесия определяется по линеаризации уравнений (13.9) и (13.10), откуда следуют два мультипликатора:

$$\mu_u = f'(x^*), \quad \mu_v = (1 - 2\varepsilon)f'(x^*), \quad (13.34)$$

<sup>5</sup> Описание хаоса в терминах периодических орбит дано в работах [Artuso et al. 1990a,b; Ott 1992].



соответствующие двум собственным модам  $u$  и  $v$ . Поскольку неподвижная точка принадлежит хаотическому отображению  $f$ , мультипликатор  $\mu_u$  по модулю больше единицы, так что направление  $u$  всегда неустойчиво. Поперечное направление  $v$  устойчиво, если  $|(1 - 2\varepsilon)f'(x^*)| < 1$ , и неустойчиво, если это условие не выполнено. Таким образом, при значении  $\varepsilon_c(x^*)$ , определяемом из условия

$$\varepsilon_c(x^*) = \frac{1 - |f'(x^*)|^{-1}}{2}, \quad (13.35)$$

происходит бифуркация. Тип бифуркации зависит от знака мультипликатора при критическом значении параметра: при  $\mu_v = 1$  происходит бифуркация вилки, а при  $\mu_v = -1$  – бифуркация удвоения периода. Если эти бифуркации мягкие (что определяется нелинейными членами отображения), то появляются либо два симметричных состояния равновесия в случае бифуркации вилки, либо траектория периода два. Эти решения устойчивы по направлению  $V$ , но от симметричного решения они наследуют неустойчивость по направлению  $U$ . Бифуркация неподвижной точки схематически показана на рис. 13.6.

Описанная ситуация верна для всех неподвижных точек и периодических траекторий отображения  $f(x)$ , так что от симметричной траектории периода  $T$ ,  $x^p(t) = y^p(t)$ , ответвляется либо пара симметричных друг другу траекторий того же периода в результате бифуркации вилки, либо траектория удвоенного периода в результате бифуркации удвоения периода.

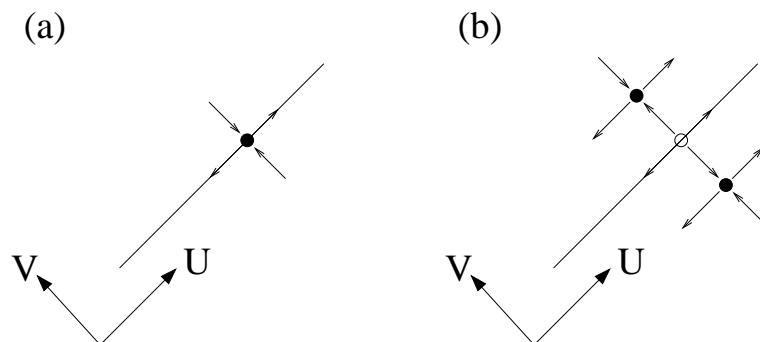


Рис. 13.6. Так выглядит мягкая поперечная бифуркация неустойчивой неподвижной точки. (a) При  $\varepsilon > \varepsilon_c(x^*)$  неподвижная точка неустойчива в продольном направлении, но устойчива в поперечном. (b) При  $\varepsilon < \varepsilon_c(x^*)$  в результате поперечной неустойчивости рождается цикл периода два или пара неподвижных точек.

Чтобы найти точку бифуркации, достаточно обобщить формулу (13.34): мультипликатор траектории периода  $T$  есть произведение локальных мультипликаторов

$$\mu_v = (1 - 2\varepsilon)^T \prod_{t=1}^T f'(x^p(t)).$$

Поэтому, аналогично (13.35),

$$\varepsilon_c(x^p) = \frac{1 - \left[ \prod_{t=1}^T |f'(x^p)| \right]^{-1/T}}{2}. \quad (13.36)$$

Обратим внимание на то, что это выражение аналогично статистическому критерию наступления синхронизации (13.15): вместо среднего по всему хаотическому аттрактору мультипликатора  $e^\lambda$  мы имеем в (13.36) мультипликатор, усредненный по данной периодической траектории.

### 13.4.2 Слабая и сильная синхронизация

Из сравнения (13.36) и (13.15) следует очень важное свойство: бифуркационные точки (13.36) в общем случае не совпадают с критической точкой (13.15). В типичной ситуации мультипликаторы различных периодических орбит не совпадают, поэтому их бифуркации, связанные с поперечной неустойчивостью, занимают целый интервал значений параметра  $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$ . Таким образом, в отличие от бифуркации одной периодической траектории, переход к синхронизации для всего хаотического множества занимает интервал по параметру. Сначала мы опишем этот переход для случая мягкой бифуркации.

Можно выделить следующие режимы (см. рис. 13.7).

*Сильная синхронизация,  $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$*

Все симметричные траектории поперечно устойчивы. При этом все точки из окрестности диагонали притягиваются к синхронному аттрактору  $x = y$  и остаются в нем.

*Слабая синхронизация,  $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$*

Некоторые<sup>6</sup> из периодических траекторий поперечно неустойчивы, но синхронное состояние устойчиво в среднем. Теперь почти все (в

<sup>6</sup> На самом деле – бесконечно много.

смысле меры Лебега) точки из окрестности диагонали притягиваются к ней, но есть и исключительные начальные точки, которые покидают эту окрестность.

*Слабо асинхронное состояние,  $\varepsilon_{c,\min} < \varepsilon < \varepsilon_c$*

Синхронный режим в среднем неустойчив, некоторые синхронные периодические траектории все еще устойчивы в поперечном направлении.

*Сильно асинхронное состояние,  $\varepsilon < \varepsilon_{c,\min}$*

Все периодические траектории поперечно неустойчивы.

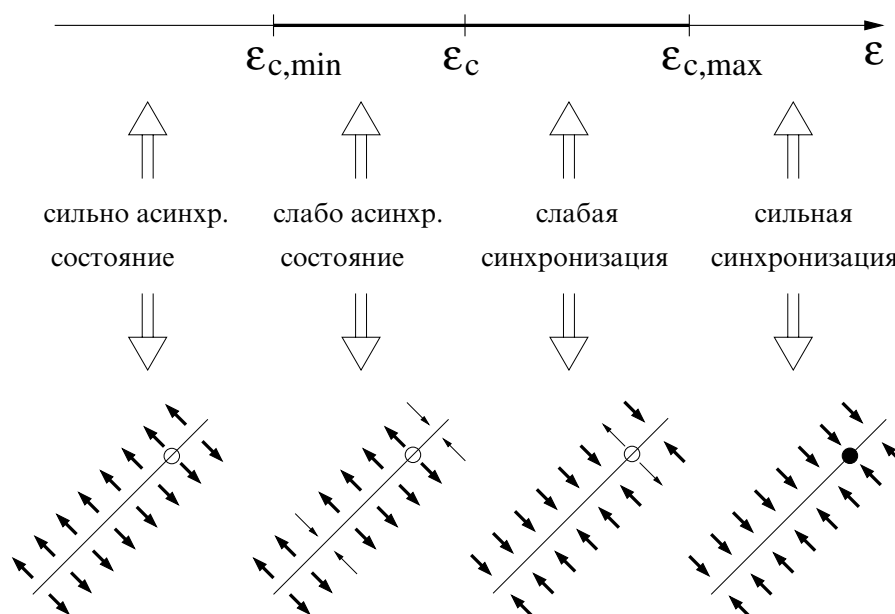


Рис. 13.7. Бифуркационная диаграмма для перехода к синхронизации. Переход «размазан» по интервалу  $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$ . На нижнем рисунке жирной стрелкой показана динамика большинства траекторий вблизи синхронного состояния (притяжение при  $\varepsilon > \varepsilon_c$  и отталкивание при  $\varepsilon < \varepsilon_c$ ). Тонкой стрелкой показана нетипичная динамика. При  $\varepsilon < \varepsilon_{c,\min}$  все симметричные траектории поперечно неустойчивы, это сильно асинхронный режим. При  $\varepsilon_{c,\min} < \varepsilon < \varepsilon_c$  большинство симметричных траекторий поперечно неустойчиво (слабо асинхронное состояние). При  $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$  почти все траектории на симметричном аттракторе являются поперечно притягивающими, хотя некоторые поперечно неустойчивы (слабая синхронизация). При  $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$  все траектории на симметричном аттракторе поперечно устойчивы (сильная синхронизация). Неподвижная точка, испытывающая бифуркацию при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ , отмечена кружком  $\circ$  (ср. с рис. 13.6).

Описанные выше свойства устойчивости периодических орбит непосредственно соответствуют статистическому описанию раздела 13.3: наибольший (наименьший) мультипликатор соответствует наибольшему (соответственно, наименьшему) локальному по времени ляпуновскому показателю. Область, в которой существует степенное распределение, соответствует режимам слабой синхронизации и слабой десинхронизации.

Наиболее нетривиальным является режим слабой синхронизации, в котором синхронное симметричное состояние устойчиво в среднем, но в то же время некоторые периодические орбиты поперечно неустойчивы. Отметим, что из существования единственной поперечно неустойчивой периодической орбиты следует, что поперечно неустойчивые траектории могут быть найдены везде: действительно, для каждой периодической траектории существует плотное множество точек, со временем приближающихся к ней, и траектории, начинающиеся в этих точках, в конце концов приходят к неустойчивой периодической траектории и сами становятся поперечно неустойчивыми. Получается парадоксальная ситуация: в аттракторе есть плотное множество непритягивающих траекторий. Мы сталкиваемся здесь с ситуацией, когда тонкие различия в математическом определении аттрактора становятся существенными. Поэтому напомним два распространенных определения аттрактора динамической системы.

#### *Топологическое определение*

Аттрактор определяется (см., например, [Каток и Хассельблат 1999]) как компактное множество  $\mathcal{A}$ , имеющее окрестность  $\mathcal{U}$ , такую, что  $\bigcap_{n>0} f^n(\mathcal{U}) = \mathcal{A}$  и  $f^k(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$  при некотором  $k > 0$ . Это определение означает, что существует открытая окрестность, все точки которой притягиваются к  $\mathcal{A}$ .

#### *Вероятностное определение по Милнору*

Милнор [Milnor 1985] определяет аттрактор как замкнутое множество, область притяжения  $\rho(\mathcal{A})$  которого имеет строго положительную меру; при этом не существует строго меньшего множества  $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$ , чья область притяжения совпадала бы с  $\rho(\mathcal{A})$  с точностью до множества, имеющего нулевую меру Лебега.

Различие между этими двумя определениями очевидно: в определении Милнора допускается, чтобы некоторые близкие точки уходили от аттрактора, в то время как в топологическом определении это исключается. Из сказанного выше следует, что в сильно

синхронном состоянии при больших параметрах связи аттрактор топологический, а в слабо асинхронном режиме – милноровский. Топологический аттрактор при  $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$  больше милноровского – он включает траектории, испытывающие бифуркацию от поперечно неустойчивых орбит, и их неустойчивые многообразия. Как было показано в разделе 13.3, при слабой синхронизации плотность распределения имеет степенной хвост, если из-за малой расстройки или шума строго симметричный режим невозможен. Геометрически этому соответствует раздувание милноровского аттрактора в топологический вследствие шума и/или расстройки.

### 13.4.3 Локальный и глобальный ридлинг

Выше мы обсуждали случай мягкой поперечной неустойчивости периодических орбит симметричного аттрактора, как показано на рис. 13.6. В этом случае новые поперечно устойчивые периодические точки появляются в окрестности диагонали  $x = y$ . Соответственно, топологический аттрактор, который можно рассматривать как «огibaющую» этих появившихся асимметричных периодических точек, мягко вырастает из диагонали. Милноровский аттрактор на диагонали  $x = y$  притягивает подавляющее большинство соседних точек, но есть исключительные возмущения, которые растут в поперечном направлении. Эти растущие возмущения, однако, не могут отойти далеко от синхронного состояния (особенно, если связь близка к критической, при которой возникает первая поперечная неустойчивость  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{c,\max}$ ), поскольку рост ограничен неустойчивыми многообразиями родившихся асимметричных периодических орбит. Фактически почти все возрастающие возмущения возвращаются к симметричному состоянию (кроме тех, что лежат на устойчивых многообразиях асимметричных периодических орбит). Эта ситуация называется *локальный ридлинг*.<sup>7</sup> Она существует вблизи симметричного состояния при  $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{c,\max}$  и проявляется на пороге  $\varepsilon = \varepsilon_c$ .

Другая ситуация наблюдается в случае, когда поперечная бифуркация периодической орбиты на симметричном аттракторе (например, типа вилки) – жесткая. В этом случае при  $\varepsilon = \varepsilon_{c,\max}$  пара симметричных неподвижных точек (периодических орбит) «влипают» в симметричную точку (периодическую орбиту), так что последняя становится неустойчивой. В отличие от локального ридлинга, поперечные возмущения теперь не остаются в окрестности симметричной орбиты, а отходят далеко от диагонали (или даже уходят на

<sup>7</sup> От английского riddle – решето, сито.

бесконечность). То же самое происходит и при жесткой бифуркации удвоения периода, оба этих случая показаны на рис. 13.8.

Режим слабой синхронизации при глобальном ридлинге еще более чувствителен, поскольку в окрестности диагонали есть точки, покидающие ее и уходящие к какому-нибудь удаленному аттрактору. Более того, эти точки плотны в окрестности диагонали (здесь работает тот же самый аргумент, что и в случае локального ридлинга), хотя их мера стремится к нулю при приближении к диагонали  $x = y$ . Такая структура области притяжения аттрактора называется *глобальным ридлингом*; для нее характерна особая чувствительность к шуму. Действительно, шум выбивает траекторию с диагонали, и поэтому есть конечная вероятность попасть в область притяжения удаленного аттрактора в каждый момент времени. Поэтому синхронизация возможна только как временный, переходный режим – в конце концов все траектории покидают окрестность синхронного состояния.

Суммируя свойства перехода к синхронизации, подчеркнем, что мы имеем здесь дело с бифуркацией хаос–хаос, которая размазана по параметру. В самом деле, вся область параметра  $(\varepsilon_{c,\min}, \varepsilon_{c,\max})$  демонстрирует нетривиальную динамику, которую можно описывать как топологически, так и статистически. Эта ситуация типична для хаотических систем с флуктуирующими локальными по времени показателями Ляпунова. Необычные свойства перехода проявляются и в более сложных ситуациях, обсуждению которых посвящена следующая глава.

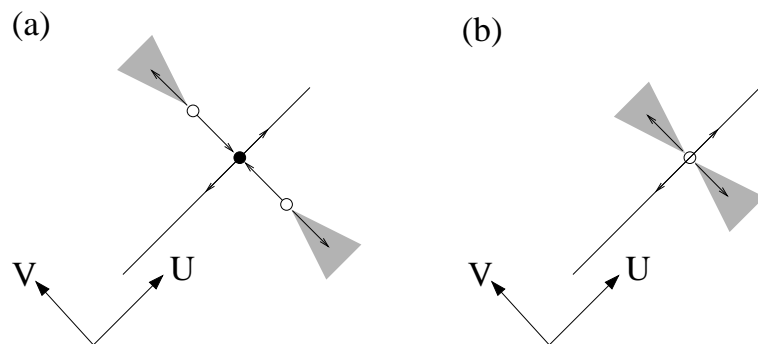


Рис. 13.8. Жесткая поперечная бифуркация неподвижной точки. (а) При  $\varepsilon > \varepsilon_{c,\max}$  точка устойчива. Серым показаны точки, уходящие к далекому аттрактору. (б) При жесткой бифуркации  $\varepsilon = \varepsilon_{c,\max}$ , область притяжения далекого аттрактора касается диагонали. У затененной области есть прообразы (не показанные на рисунке), которые плотны в окрестности диагонали.

### 13.5 Библиографические заметки

Мы описывали полную синхронизацию, следуя ранним работам [Fujisaka and Yamada 1983; Yamada and Fujisaka 1983; Pikovsky 1984a]. Статистические свойства на пороге синхронизации обсуждались в работах [Pikovsky 1984a; Yamada and Fujisaka 1986; Fujisaka *et al.* 1986; Fujisaka and Yamada 1987; Yamada and Fujisaka 1987; Pikovsky and Grassberger 1991]. Модуляционная перемежаемость рассматривалась также в [Hammer *et al.* 1994; Heagy *et al.* 1994c; Platt *et al.* 1994; Venkataramani *et al.* 1995; Xie *et al.* 1995; Yu *et al.* 1995; Ćenys *et al.* 1996; Lai 1996a; Venkataramani *et al.* 1996; Yang and Ding 1996; Ćenys *et al.* 1997a,b; Ding and Yang 1997; Fujisaka *et al.* 1997; Kim 1997; Fujisaka *et al.* 1998; Miyazaki and Hata 1998; Nakao 1998].

Топологические свойства перехода к синхронизации обсуждались в работах [Pikovsky and Grassberger 1991; Ashwin *et al.* 1994, 1996, 1998; Aston and Dellnitz 1995; Heagy *et al.* 1995; Ashwin and Aston 1998; Maistrenko *et al.* 1998]. Общее описание перехода к ридлингу можно найти в статьях [Heagy *et al.* 1994a; Lai *et al.* 1996; Lai and Grebogi 1996; Maistrenko and Kapitaniak 1996; Billings *et al.* 1997; Lai 1997; Maistrenko *et al.* 1997, 1998, 1999a; Nagai and Lai 1997a,b; Kapitaniak *et al.* 1998; Kapitaniak and Maistrenko 1998; Manscher *et al.* 1998; Astakhov *et al.* 1999].

Эксперименты по полной синхронизации проводились с электронными схемами [Schuster *et al.* 1986; Heagy *et al.* 1994b, 1995; Yu *et al.* 1995; Ćenys *et al.* 1996; Lorenzo *et al.* 1996; Rulkov 1996] и лазерами [Roy and Thornburg 1994; Terry *et al.* 1999]. См. также специальный выпуск журнала CHAOS [Pecora (ed.) 1997] и приведенные там ссылки.

## Глава 14

# Полная синхронизация II: обобщения и сложные системы

В предыдущей главе мы рассматривали простейшую реализацию полной синхронизации в системе двух симметрично взаимодействующих одномерных отображений. Ниже мы опишем более общие ситуации: много связанных отображений, системы с непрерывным временем, распределенные системы. Кроме того, мы обсудим синхронизацию в более общем контексте как симметричный хаотический режим. В основном мы ограничимся линейным приближением, из которого следует порог синхронизации; только в некоторых случаях мы опишем нелинейные эффекты вблизи порога.

### 14.1 Идентичные отображения, связь общего вида

Простейшее обобщение теории, развитой в главе 13, состоит в рассмотрении большого ансамбля связанных хаотических систем.

Рассмотрим  $N$  идентичных линейно связанных хаотических отображений (13.1). Представим связь с помощью общего линейного оператора  $\hat{L}$ , задаваемого матрицей  $N \times N$ :

$$x_k(t+1) = \sum_{j=1}^N L_{kj} f(x_j(t)). \quad (14.1)$$



Условие диссипативности связи, обсуждавшееся в разделе 13.1, теперь формулируется следующим образом:

- (i) Система (14.1) допускает симметричное полностью синхронизованное решение, в котором состояния всех отображений идентичны

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = U(t).$$

Это выполняется, если постоянный вектор  $\mathbf{e}_1 = (1, \dots, 1)$  является собственным вектором матрицы  $\hat{L}$  с собственным значением  $\sigma_1 = 1$ .

- (ii) Все остальные собственные значения  $\hat{L}$  по абсолютной величине меньше 1. Это приводит к затуханию неоднородных возмущений под действием связи.

Условие устойчивости синхронного состояния может быть получено путем линеаризации уравнения (14.1). В отличие от простейшего случая главы 13, теперь имеется много поперечных мод, и устойчивость определяется максимальным поперечным показателем Ляпунова. Рассмотрим эволюцию неоднородного возмущения  $\delta x_k(0)$  возле хаотического решения  $U(t)$ . После  $T$  итераций получаем

$$\delta x_k(T) = \hat{L}^T \prod_{t=1}^T f'(U(t)) \delta x_k(0).$$

Поскольку множители  $f'(U)$  не зависят от  $k$ , эволюция возмущения разлагается по собственным векторам матрицы  $L_{kj}$ . При больших  $T$  доминирует наибольшее неоднородное возмущение, соответствующее второму собственному вектору  $\mathbf{e}_2$ , поскольку его собственное значение  $\sigma_2$  ближе всего к 1; таким образом, рост возмущения определяется, аналогично (13.14), формулой

$$|\delta x_k(T)| \propto \mathbf{e}_2 |\sigma_2|^T e^{T\lambda} = \mathbf{e}_2 e^{T\lambda_{\perp}}, \quad \lambda_{\perp} = \lambda + \ln |\sigma_2|. \quad (14.2)$$

В этих обозначениях критерий линейной устойчивости синхронного режима совпадает с выведенным в главе 13.2:  $\lambda_{\perp} < 0$ .

Этот критерий применим как к большим, так и к малым ансамблям хаотических систем. В первом случае естественно возникает вопрос: возможна ли полная синхронизация очень большого числа взаимодействующих подсистем  $N$ , и что происходит в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Как следует из (14.2), ответ на этот вопрос зависит от поведения спектра оператора  $\hat{L}$ . Собственное значение

$\sigma_1 = 1$  всегда присутствует, поэтому мы можем записать критерий устойчивости синхронного режима как

$$\ln |\sigma_1| - \ln |\sigma_2| > \lambda.$$

Это означает, что в спектре линейного оператора связи  $\hat{L}$  должна быть щель (запрещенная зона), размером по меньшей мере  $\lambda$ , между первым и вторым собственными значениями. Другими словами, динамика несимметричных мод должна быть достаточно быстрой: затухание из-за связи должно быть сильнее, чем неустойчивость из-за хаоса. Очевидно, не все типы взаимодействия приводят к щели в спектре. Мы рассмотрим ниже в качестве примеров несколько физически важных ситуаций.

### 14.1.1 Однонаправленная связь

С физической точки зрения, однонаправленная связь означает, что сигнал с одного хаотического осциллятора действует на другой. Такую связь легко реализовать электронно, связывая электронные цепи сигналом, пропущенным через усилитель. Обычно однонаправленная связь рассматривается для случая регулярной цепочки элементов, но она может быть осуществлена и в более сложных ситуациях, см. рис. 14.1.

Для двух систем однонаправленная связь описывается матрицей взаимодействия

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{14.3}$$

Собственные значения легко находятся:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 - \varepsilon,$$

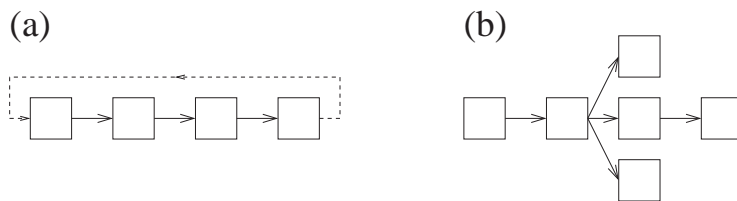


Рис. 14.1. Схематическое представление однонаправленной связи в одномерной цепочке (а) и в сети (б). Цепочка может образовывать кольцо, если последний элемент действует на первый (штриховая линия в (а)).

синхронное состояние линейно устойчиво, если

$$\lambda + \ln |1 - \varepsilon| < 0. \quad (14.4)$$

Этот результат легко обобщается на случай цепочки из  $N$  однонаправленно связанных систем (рис. 14.1a), для которых матрица имеет вид

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (14.5)$$

Здесь второе собственное значение (которое на самом деле является  $(N - 1)$ -кратно вырожденным) также равно  $\sigma_2 = 1 - \varepsilon$ , и для устойчивости синхронного состояния справедливо (14.4), независимо от числа  $N$  взаимодействующих систем: оператор, описывающий однонаправленную связь, имеет спектральную щель. Уместно отметить, что существование щели существенно зависит от граничных условий для цепочки. При выводе (14.5) мы предполагали отсутствие взаимодействия между первым и последним элементами цепочки. Если рассмотреть цепочку с однонаправленной связью и *периодическими* граничными условиями (см. рис. 14.1a), где первый элемент связан с последним, то матрица взаимодействия будет выглядеть как

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (14.6)$$

и спектр становится совершенно другим. Поскольку цепочка однородна, собственные вектора есть Фурье-моды, и спектр можно представить как функцию волнового вектора  $\mathcal{K}$

$$|\sigma(\mathcal{K})|^2 = (1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon) \cos \mathcal{K} + \varepsilon^2, \quad -\pi \leq \mathcal{K} < \pi.$$

В этом спектре щель отсутствует (поскольку  $|\sigma(\mathcal{K})| \rightarrow 1$  при  $\mathcal{K} \rightarrow 0$ ), при достаточно больших  $N$  синхронизация невозможна.

Такое большое влияние граничных условий на динамику цепочки допускает прозрачное физическое толкование. В цепочке с однонаправленной связью локальные неоднородные возмущения на каждом элементе затухают; однако они не исчезают, а распространяются вдоль цепочки. При граничных условиях (14.5) возмущение в конце

концов затухает на последнем элементе, в то время как для системы (14.6) возмущение снова появляется на первом элементе. В терминах теории устойчивости распределенных систем мы имеем дело с *конвективной неустойчивостью*, т.е. возмущение затухает в том месте, где оно возникло, но распространяется и растет вдоль по потоку. Противоположный случай, когда возмущение растет там, где оно было произведено, называется *абсолютной неустойчивостью* (см. например [Лифшиц и Питаевский 1981]).

### 14.1.2 Асимметричная локальная связь

Случай асимметричной локальной связи можно представить как комбинацию диффузионной (13.3) и однонаправленной (14.5) связи:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 - \gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon - \gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon - \gamma & \gamma & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (14.7)$$

В этой модели, принадлежащей к классу цепочек связанных отображений, хаотические отображения образуют цепочку, в которой взаимодействуют ближайшие соседи. В термодинамическом пределе, когда число взаимодействующих отображений стремится к бесконечности, спектр собственных значений принимает вид

$$\sigma(\mathcal{K}) = 1 - \varepsilon - \gamma + 2\sqrt{\varepsilon\gamma} \cos \mathcal{K}, \quad -\pi < \mathcal{K} < \pi.$$

При  $\varepsilon \neq \gamma$  этот спектр имеет щель при  $\mathcal{K} = 0$ :

$$\sigma(\mathcal{K} \rightarrow 0) = 1 - (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\gamma})^2 < 1.$$

Эта щель делает возможной полную синхронизацию в цепочке точно так же, как при описанной выше односторонней связи. При чисто диффузионной симметричной связи  $\varepsilon = \gamma$  щель исчезает: в длинной цепочке хаотических элементов диффузионная связь не приводит к синхронизации, так как длинноволновые моды с малыми  $\mathcal{K}$  всегда неустойчивы.

### 14.1.3 Глобальная связь (через среднее поле)

При глобальной связи каждый элемент взаимодействует со всеми другими, причем сила связи не зависит от «расстояния» между ними

(см. раздел 4.3, главу 12 и рис. 4.24). В типичной постановке задачи рассматривается  $N$  идентичных хаотических отображений (13.1), взаимодействующих друг с другом через диссипативную связь типа (13.3). Поскольку число связей для каждого элемента равно  $N - 1$ , удобно отнормировать константу связи на  $N$ . В результате получаем уравнения

$$x_k(t+1) = (1 - \varepsilon)f(x_k(t)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j(t)), \quad k = 1, \dots, N. \quad (14.8)$$

Систему (14.8) называют системой глобально связанных отображений. Ее можно интерпретировать и как систему с взаимодействием через среднее поле, поскольку последний член в правой части есть среднее по всем элементам ансамбля.

Матрица взаимодействия  $\hat{L}$  может быть представлена в виде

$$\hat{L} = (1 - \varepsilon)\hat{I} + \frac{\varepsilon}{N}\hat{J},$$

где  $\hat{I}$  – единичная матрица, а матрица  $\hat{J}$  состоит из одних единиц. В режиме полной синхронизации состояния всех элементов идентичны  $x_1 = x_2 = \dots = x_N$  и эволюционируют согласно отображению (13.1) – легко видеть, что такое решение удовлетворяет системе (14.8). Собственные значения оператора связи  $\hat{L}$  легко вычисляются: одно из них равно 1, а остальные  $N - 1$  собственных значений равны  $1 - \varepsilon$ . Таким образом, из условия устойчивости вытекает условие синхронизации

$$\lambda + \ln |1 - \varepsilon| < 0,$$

где  $\lambda$  – ляпуновский показатель локального отображения. Поскольку устойчивость всех неоднородных мод одинакова (второе собственное значение матрицы связи  $(N - 1)$ -кратно вырождено), при неустойчивости синхронного состояния, по линейной теории, все моды растут и состояния всех отображений становятся различными. Однако при численном моделировании (14.8) наблюдаются более упорядоченные режимы. После процесса установления происходит кластеризация: образуются большие группы элементов, находящихся в идентичном состоянии. Это явление иллюстрируется на рис. 14.2. Число кластеров и распределение подсистем по кластерам зависит от начальных условий. При больших  $N$  наблюдаются как режимы с небольшим числом кластеров, так и такие, в которых число кластеров порядка  $N$ .

Кластерное состояние можно рассматривать как слабую синхронизацию, которая наблюдается, если связь достаточно сильна, чтобы сделать одинаковыми часть систем, но недостаточна для полной синхронизации. Так же, как и в случае двух связанных отображений (см. обсуждение ридлинга в разделе 13.4), кластерные аттракторы могут иметь «дырявые» (riddled) области притяжения и поэтому очень чувствительны к малому шуму. Кластеры могут наблюдаться и вследствие конечной точности численного моделирования (как и в случае численной ловушки для двух связанных систем, см. раздел 13.3): если состояния двух систем в некоторый момент времени совпадают в пределах машинной точности, то все последующие состояния этих систем будут идентичны, даже если синхронный режим неустойчив.

## 14.2 Системы с непрерывным временем

Исследование полной синхронизации в системах с непрерывным временем проводится точно так же, как для отображений. Простейшая модель состоит из двух взаимодействующих хаотических систем. Каждая  $M$ -мерная динамическая система описывается нелинейными

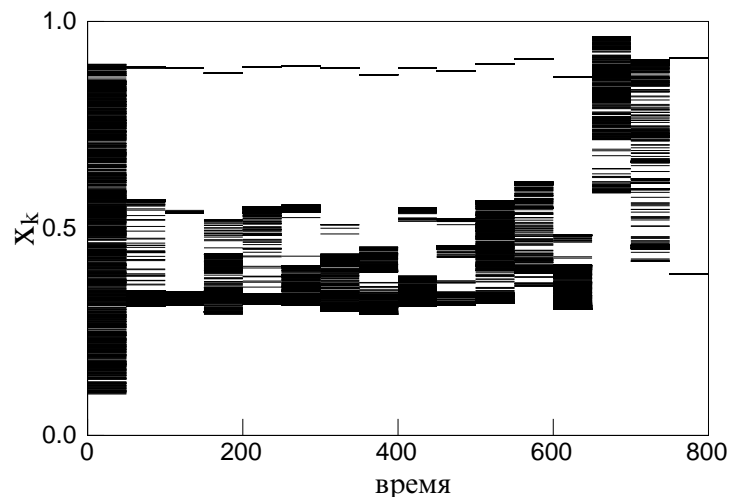


Рис. 14.2. Динамика ансамбля из 1000 глобально связанных логистических отображений  $x \rightarrow 4x(1-x)$  с постоянной связи  $\varepsilon = 0.28$ . Системы имеют случайные начальные условия, равномерно распределенные в интервале  $(0.1, 0.9)$ . Значения  $x_k$  (горизонтальные отрезки) выводятся на каждой 50-й итерации. После примерно 750 итераций образуется двухкластерное состояние.

обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_M, t), \quad k = 1, \dots, M. \quad (14.9)$$

Эти уравнения могут быть неавтономными, т.е. случай вынужденных колебаний также включен в рассмотрение.

Чтобы ввести диссипативную связь в пару идентичных систем,<sup>1</sup> естественно добавить линейные симметричные слагаемые в правые части уравнений (ср. с обсуждением диссипативной связи в разделе 8.2)

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_M, t) + \varepsilon_k(y_k - x_k), \quad (14.10)$$

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1, \dots, y_M, t) + \varepsilon_k(x_k - y_k). \quad (14.11)$$

При такой связи всегда есть синхронное хаотическое решение  $x_k(t) = y_k(t) = U_k(t)$ , остается только исследовать его устойчивость.

Для отклонений  $v_k = y_k(t) - x_k(t)$  получаем линеаризованные уравнения

$$\frac{dv_k}{dt} = J_{kj}v_j - 2\varepsilon_k v_k, \quad (14.12)$$

где  $J_{kj} = \partial f_k(U(t))/\partial x_j$  – матрица Якоби, составленная из частных производных. Асимптотически при больших  $t$  решения этой линейной системы растут экспоненциально. Поскольку размерность системы (14.12) равна  $M$ , существуют  $M$  поперечных ляпуновских показателей (аналогично существованию  $M$  обычных ляпуновских показателей в  $M$ -мерной точечной системе (14.9)), и наибольший из них определяет устойчивость по отношению к неоднородным возмущениям. Поскольку правые части (14.12) зависят от параметров связи  $\varepsilon_k$ , максимальный ляпуновский показатель  $\lambda_{\perp}$  также зависит от этих параметров, и область синхронизации определяется из условия

$$\lambda_{\perp}(\varepsilon_k) < 0.$$

В простейшем случае все параметры связи равны  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_M = \varepsilon$ . Тогда, подставив  $v_k = e^{-2\varepsilon t} \tilde{v}_k$ , можно свести (14.12) к виду

$$\frac{d\tilde{v}_k}{dt} = J_{kj}\tilde{v}_j, \quad (14.13)$$

<sup>1</sup> Идентичность означает, что и явная зависимость правых частей от времени одинакова, т.е. внешние силы, действующие на системы, также идентичны.

т.е. к уравнениям, описывающим динамику линейных возмущений одной хаотической системы; рост этих возмущений задается максимальным ляпуновским показателем  $\lambda_{\max}$ . В этом случае условие синхронизации принимает простой вид

$$2\varepsilon > \lambda_{\max}.$$

В главе 10 мы описали другой тип синхронизации в системах с непрерывным временем – фазовую синхронизацию. В некотором смысле, полная синхронизация – более общее явление, так как ее можно наблюдать для любых хаотических систем, независимо от того, можно ли для них ввести фазы и частоты; ее можно наблюдать как в автономных системах, так и в находящихся под внешним воздействием, а также в системах с дискретным временем (отображениях). С другой стороны, полная синхронизация требует сильной связи и идентичности взаимодействующих систем, в то время как фазовая наблюдается при относительно слабой связи, а также в неидентичных системах.

### 14.3 Распределенные системы

Хаотические режимы в распределенных динамических системах, при которых корреляции убывают в пространстве и во времени, часто называют *пространственно–временным хаосом*.

К популярным моделям, демонстрирующим пространственно–временной хаос, относятся цепочки связанных отображений, уравнения в частных производных и цепочки связанных осцилляторов (с непрерывным временем). Подробный анализ этих моделей содержится в книгах [Kaneko 1993; Bohr *et al.* 1998] и обзорных статьях [Chaté and Manneville 1992; Cross and Hohenberg 1993].

Различают два типа полной синхронизации пространственно–временного хаоса. В одном случае речь идет о полной идентичности хаотических движений во всех точках пространства. При этом в распределенной системе наблюдаются пространственно однородные, хаотические по времени движения. В другом случае движения хаотичны как во времени, так и в пространстве, но они обладают определенной симметрией. Например, двумерное поле  $u(x, y, t)$  может быть однородным по  $y$  и в то же время демонстрировать одномерный пространственно–временной хаос по  $x$ . Ниже мы обсудим эти два типа полной синхронизации пространственно–временного хаоса.



## 14.3.1 Пространственно однородный хаос

Модель пространственно–временного хаоса можно построить, взяв за основу конечномерную динамическую систему и составив дискретную или непрерывную среду из этих элементов. Такой подход можно рассматривать как непосредственное обобщение построения среды из колебательных элементов (см. (11.14)). Кроме цепочки связанных отображений (14.7), к этому классу принадлежат две другие популярные модели: цепочка связанных осцилляторов и уравнения реакции–диффузии. Цепочку связанных осцилляторов можно записать аналогично двум взаимодействующим осцилляторам (уравнения (14.10) и (14.11)) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \sum_{\{j\}} \varepsilon(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k),$$

где суммирование производится по соседям элемента  $k$ . Уравнения реакции–диффузии описывают непрерывное в пространстве поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1, \dots, u_M)$  путем обобщения уравнений (14.9)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = f_k(\mathbf{u}) + D_k \nabla^2 u_k, \quad k = 1, \dots, M. \quad (14.14)$$

Подобная система естественным образом возникает при описании химической турбулентности [Kuramoto 1984; Kapral and Showalter 1995], при этом переменные  $u_k$  характеризуют концентрации участвующих в реакции реагентов; их эволюция есть комбинация химической реакции с диффузией.

Синхронное решение этих уравнений есть пространственно однородное хаотическое по времени поле  $\mathbf{U}(t)$ , эволюция которого задается уравнениями (14.9). Это решение существует, если оно допускается граничными условиями, т.е., если поток через границу отсутствует,  $\nabla u_k|_B = 0$  (эти условия естественны для химических систем). В контексте химических реакций, синхронный режим описывает пространственно–однородное распределение реагентов. В распределенной системе существует множество поперечных мод (поперечных не в смысле пространственной ортогональности, а в смысле нарушения однородности), и условие устойчивости синхронного состояния можно сформулировать как отрицательность всех поперечных ляпуновских показателей.

Для системы (14.14) эти моды есть собственные функции оператора Лапласа с соответствующими граничными условиями. Пусть

$v_k^{(l)}(\mathbf{r})$  – собственная функция лапласиана, соответствующая собственному значению  $\sigma$ :

$$D_k \nabla^2 v_k^{(l)} = -\sigma^{(l)} v_k^{(l)}.$$

Тогда устойчивость по отношению к возмущению  $v^{(l)}$  определяется линейной системой

$$\frac{dv_k^{(l)}}{dt} = J_{kj} v_j^{(l)} - \sigma v_k^{(l)}, \quad (14.15)$$

которая эквивалентна (14.12). Таким образом, каждой пространственно неоднородной моде линеаризованных уравнений (14.15) отвечает спектр поперечных ляпуновских показателей; для устойчивости пространственно однородного хаоса все они должны быть отрицательны. Поскольку связь в (14.14) симметрична (присутствует только диффузия), конвективная неустойчивость, обсуждавшаяся в разделе 14.1.1, не наблюдается. В области с характерным размером  $L$  первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа порядка  $L^{-2}$ . Поэтому в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  спектр оператора диффузии не имеет щели: длинноволновые возмущения затухают медленно. Полная синхронизация в этом пределе невозможна; только в малых системах все поперечные ляпуновские показатели отрицательны. С физической точки зрения, в большой системе всегда возможны длинноволновые возмущения с ляпуновскими показателями, близкими к максимальному показателю хаотического пространственно однородного решения, поэтому эти моды неустойчивы.

Здесь следует сделать одно замечание. Выше мы везде предполагали «нормальный» пространственно–временной хаос, т.е. режим с положительными ляпуновскими показателями. Существуют примеры и «аномального» пространственно–временного хаоса, где показатели Ляпунова отрицательны [Crutchfield and Kaneko 1988; Politi *et al.* 1993; Bonaccini and Politi 1997]. Этот «устойчивый» хаос неустойчив по отношению к возмущениям конечной амплитуды, не описываемым линеаризованными уравнениями [Torcini *et al.* 1995]. В этой ситуации наши аргументы, основанные на линейном анализе устойчивости, неприменимы.

### 14.3.2 Поперечная синхронизация пространственно–временного хаоса

Пространственно–временной хаос может быть неоднородным по некоторым направлениям в пространстве, но однородным – син-

хронным – по другим. Простейший пример такой ситуации получается, если две распределенные системы с турбулентной динамикой связаны друг с другом диссипативной связью. В качестве примера рассмотрим два связанных уравнения Курамото–Сивашинского

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \varepsilon(u_2 - u_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \varepsilon(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Уравнение Курамото–Сивашинского демонстрирует пространственно–временной хаос, если размер области достаточно большой (см., например, [Hupman *et al.* 1986; Bohr *et al.* 1998]). Диссипативная связь пропорциональна  $\varepsilon$ , она стремится уравнивать состояния систем во всех точках пространства во все моменты времени. Мы можем исследовать эту модель точно так же, как систему связанных дифференциальных уравнений (14.10) и (14.11): порог синхронизации определяется максимальным ляпуновским показателем пространственно–временного хаоса:

$$2\varepsilon_c = \lambda_{\max}.$$

Синхронизация в связанных уравнениях Курамото–Сивашинского показана на рис. 14.3.

Интересное явление наблюдается вблизи перехода к полной синхронизации. Как было показано в главе 13, такой переход в сосредоточенной системе сопровождается сильной модуляционной перережаемостью, вызванной флуктуациями локального показателя роста. В распределенной системе (типа уравнения Курамото–Сивашинского) показатель роста флуктуирует в пространстве и во времени. Поэтому наблюдается перемежающийся процесс, в котором асинхронные всплески появляются, дрейфуют и исчезают, причем весьма нерегулярно [Kurths and Pikovsky 1995].

Поперечно синхронизованный пространственно–временной хаос возникает не только в искусственных моделях типа (14.16), но и в двумерных и трехмерных (по пространству) уравнениях в частных производных. Для этого необходимо, чтобы оператор диффузии был анизотропен по отношению к пространственным координатам. Рассмотрим, например, систему реакции–диффузии (14.14) в прямоугольнике  $0 < x < L_x, 0 < y < L_y$  в случае, когда оператор диффузии имеет вид

$$D_x \frac{\partial}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Собственные моды  $u \propto \cos(\pi n_x x/L_x) \cos(\pi n_y y/L_y)$  соответствуют собственным значениям

$$\sigma = \pi^2 (D_x n_x^2 L_x^{-2} + D_y n_y^2 L_y^{-2}), \quad n_{x,y} = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим, что  $D_x L_x^{-2} \ll D_y L_y^{-2}$ , т.е. размер системы  $L_x$  в направлении  $x$  много больше размера  $L_y$  по  $y$ . Тогда однородное состояние может быть неустойчиво по отношению ко многим модам, зависящим от  $x$ , в то время как однородность по  $y$  сохраняется. Таким образом, получается пространственно-временной хаос по координате  $x$ , полностью синхронизованный в направлении  $y$ .

Для иллюстрации этого явления рассмотрим двумерное анизотропное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (ср. с (11.15))

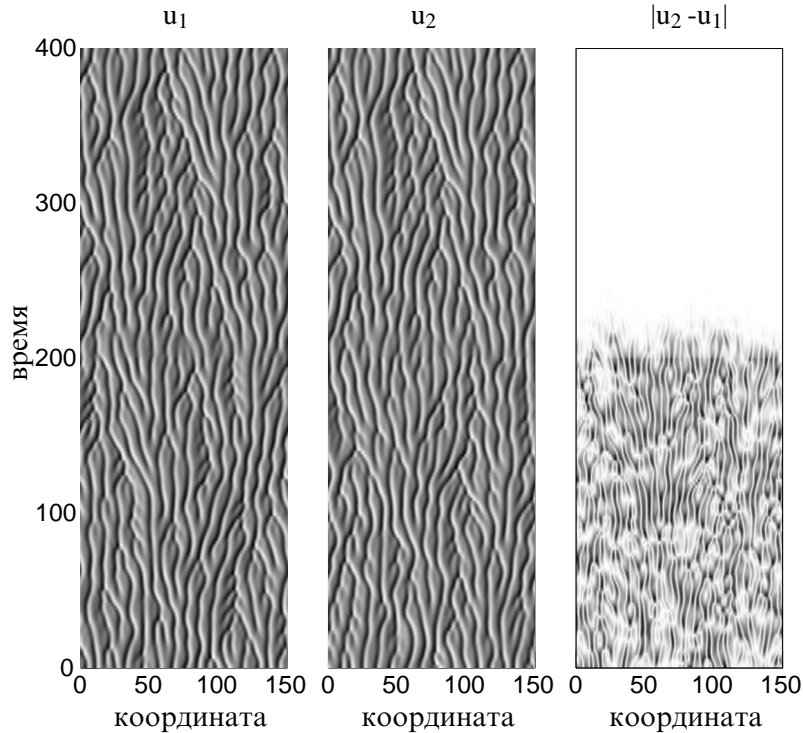


Рис. 14.3. Синхронизация в связанных уравнениях Курамото–Сивашинского (14.16). Эволюция во времени полей  $u_{1,2}$  и  $|u_1 - u_2|$  показана градациями серого цвета. В интервале  $0 < t < 200$  связь отсутствует  $\varepsilon = 0$  и поля независимы. При  $t = 200$  включается связь  $\varepsilon = 0.1 > \varepsilon_c$ , приводящая к синхронному пространственно-временному хаосу  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ .

$$\frac{\partial a(x, y, t)}{\partial t} = a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1)\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + d_1\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}. \quad (14.17)$$

Чисто диффузионная связь в направлении  $y$  может подавить поперечную неустойчивость, и наблюдаемый режим будет однороден по  $y$  (рис. 14.4b). Если коэффициент диффузии  $d_1$  мал, то поле меняется нерегулярно по обоим направлениям (рис. 14.4a).

### 14.3.3 Синхронизация в связанных клеточных автоматах

Клеточные автоматы (см. [Gutowitz 1990] и содержащиеся там ссылки) демонстрируют не такой сильный хаос, как цепочки связанных отображений. Действительно, в клеточных автоматах дискретны не только пространство и время, но и само поле принимает только дискретные значения (обычно рассматриваются автоматы с двумя состояниями «0» и «1»). Тем не менее, в некоторых клеточных автоматах наблюдается нерегулярная динамика (это возможно только в бесконечных цепочках). Диссипативную связь в клеточных автоматах ввести не так просто, как в отображениях, поскольку состояния между «0» и «1» не существуют. Поэтому используют статистическое взаимодействие: состояния в некоторых точках пространства (выбранных с вероятностью  $p$ ) становятся идентичными, а в остальных точках ничего не происходит. Вероятность  $p$  играет роль параметра связи: при  $p = 1$  полная синхронизация наступает уже на первом шаге по времени, а при  $p = 0$  не наступает никогда. Полная синхронизация наблюдается, если вероятность связи  $p$  превышает

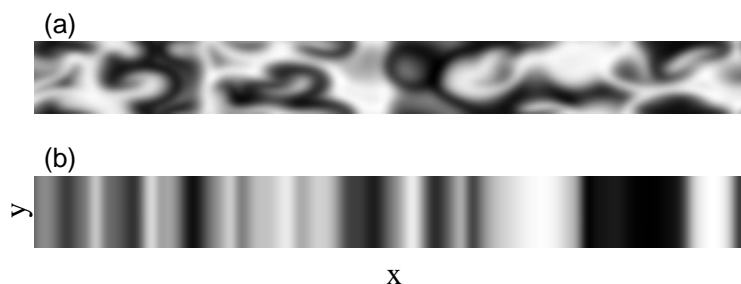


Рис. 14.4. Пространственное распределение действительной части решения комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау (14.17)  $a(x, y, t)$ . Рисунки (a) и (b) отличаются значением коэффициента диффузии  $d_1$ : в асинхронном режиме (a)  $d_1 = 0.5$ , а в синхронном (в направлении  $y$ ) состоянии (b)  $d_1 = 2$ . Остальные параметры  $c_1 = -1$  и  $c_3 = 1.5$  в обоих случаях одинаковы.

критическое значение  $p_c$ . Переход к синхронизации такой же, как при направленной перколяции (см., например, [Grassberger 1995] и приведенные там ссылки): область пространства, в которой состояния двух клеточных автоматов различны,<sup>2</sup> на пороге синхронизации образует бесконечный фрактал; в синхронном режиме она конечна, а в асинхронном бесконечна и имеет постоянную плотность.

#### 14.4 Синхронизация как симметричное состояние общего вида

До сих пор мы рассматривали синхронизацию как результат взаимодействия двух идентичных физических систем. В более общем контексте синхронный режим можно рассматривать просто как симметричное состояние и исследовать, при каких условиях такое состояние возможно и когда оно устойчиво. При этом может оказаться, что мы не можем разделить систему на отдельные части, но «синхронизация» – в том или ином смысле – все же будет наблюдаться.

Пусть два набора переменных

$$x_1, \dots, x_M \quad \text{и} \quad y_1, \dots, y_M$$

описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k^x(x, y, t), \quad \frac{dy_k}{dt} = F_k^y(x, y, t), \quad (14.18)$$

при единственном предположении о существовании симметричного хаотического решения  $x_k(t) = y_k(t) = U_k(t)$  при всех  $k$ . Отметим, что мы не считаем саму систему симметричной (см., например, случай однонаправленной связи в разделе 14.1.1, где связь асимметрична, но существует симметричное хаотическое решение) и не требуем, чтобы диагональ  $x_k = y_k$  была инвариантной. Симметричное состояние можно интерпретировать как синхронное, и для исследования его устойчивости по отношению к поперечным возмущениям нужно линеаризовать (14.18). Некоторые возмущения не нарушают симметрию, а асимметричные в общем случае растут (убывают) экспоненциально с соответствующими поперечными ляпуновскими показателями. Максимальный показатель определяет устойчивость симметричного состояния; в зависимости от параметров оно может быть притягивающим или отталкивающим.

<sup>2</sup> В теории клеточных автоматов эту область называют кластером.

В качестве простого примера несимметричной системы рассмотрим популярную модель двух связанных одномерных отображений

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t)) + \varepsilon_1(y(t) - x(t)), \\y(t+1) &= f(y(t)) + \varepsilon_2(x(t) - y(t)).\end{aligned}$$

Отметим, что, хотя связь выглядит линейной, она на самом деле более сложная и не обязательно приводит к синхронизации. Устойчивость симметричного режима  $x = y = U$  по отношению к пространственным возмущениям приводит к линейному уравнению для  $v = x - y$

$$v(t+1) = v(t)[f'(U(t)) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2].$$

Отсюда следует, что поперечный ляпуновский показатель

$$\lambda_{\perp} = \langle \ln |f'(U(t)) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rangle.$$

Его зависимость от параметров  $\varepsilon_{1,2}$  может быть нетривиальной; важно определить области отрицательных  $\lambda_{\perp}$ , соответствующие линейно устойчивым симметричным режимам. Простое выражение для поперечных ляпуновских показателей удастся написать только для связанных отображений типа кривой тента (13.5) (ср. с (13.30)):

$$\lambda_{\perp} = a \ln \left| \frac{1}{a} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right| + (1-a) \ln \left| \frac{1}{a-1} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right|.$$

Из этого примера видно, что поперечные показатели не связаны непосредственно с ляпуновскими показателями симметричного хаоса.

#### 14.4.1 Копированные системы

Особый случай полной синхронизации в симметричных системах был рассмотрен Пекорой и Карролом [Pecora and Carroll 1990]. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений (14.9); сделаем копию (replica) одного (или нескольких) из этих уравнений. Для простоты запишем это для автономной системы третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, z), \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z), \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z), \quad \dot{z}' = f_z(x, y, z').\end{aligned}$$

Здесь мы скопировали уравнение для  $z$ , с той же самой правой частью  $f_z$ , но для новой переменной  $z'$ . Очевидно, что всегда существует симметричное решение  $x = x^0(t)$ ,  $y = y^0(t)$ ,  $z = z' = z^0(t)$ . Для проверки его устойчивости запишем уравнение для малого возмущения  $v = z - z'$ :

$$\dot{v} = f'_z(x^0(t), y^0(t), z^0(t))v.$$

Это возмущение растет экспоненциально,

$$v \propto \exp(\lambda_{\perp} t),$$

и поперечный показатель (иногда его называют условным показателем)  $\lambda_{\perp}$  равен

$$\lambda_{\perp} = \langle f'_z \rangle.$$

Если этот показатель отрицателен, то синхронный режим с  $z = z'$  линейно устойчив. Отметим, что поперечный показатель есть один из ляпуновских показателей симметричного движения в полной четырехмерной системе  $(x, y, z, z')$  (поскольку нарушающее симметрию возмущение  $v$  не зависит от других возмущений). Однако он не имеет ничего общего с ляпуновскими показателями исходной трехмерной системы  $(x, y, z)$  (поскольку в исходной системе возмущение переменной  $z$  зависит от возмущений переменных  $x$  и  $y$ ).

Идея синхронизации системы и копии непосредственно обобщается на  $M$ -мерные динамические системы, в которых создается копия  $m < M$  уравнений. Копированные переменные называют вынуждаемой, или подчиненной подсистемой, а исходные – вынуждающей, или управляющей. Отметим, что при такой синхронизации нет параметра связи: можно сказать, что связь всегда сильная, но частичная – связаны только  $m$  переменных. Поэтому синхронизацией нельзя управлять, можно только проверить, получается ли полная синхронизация для выбранных копированных переменных. В некотором смысле, синхронизация системы и копии отражает свойство хаотических систем иметь устойчивые и неустойчивые направления в фазовом пространстве; иногда устойчивость можно ассоциировать с определенными переменными или группами переменных.

В качестве примера на рис. 14.5 показана синхронизация системы и копии в модели Лоренца (10.4); копированы переменные  $y$  и  $z$ . Разности  $|y' - y|$  и  $|z' - z|$  убывают, и в конце концов в полной пятимерной системе устанавливается симметрический режим. Ресога and Carroll [1990] обнаружили, что при копировании переменной  $z$  поперечный ляпуновский показатель положителен и синхронизации не наблюдается.



## 14.5 Библиографические заметки

Связь общего вида для хаотических систем рассматривалась в работах [de Sousa Vieira *et al.* 1992; Heagy *et al.* 1994b; Gade 1996; Güémez and Matías 1996; Lorenzo *et al.* 1996; Pecora and Carroll 1998; Femat and Solis-Perales 1999; Pasemann 1999]. Частному случаю глобальной связи посвящены статьи [Kaneko 1990, 1991, 1997, 1998; Crisanti *et al.* 1996; Hasler *et al.* 1998; Zanette and Mikhailov 1998a,b; Balmforth *et al.* 1999; Glendinning 1999; Mendes 1999; Maistrenko *et al.* 2000]. Wang *et al.* [2000a] провели эксперименты с глобально связанными электрохимическими осцилляторами. Gade [1996] и Manrubia and Mikhailov [1999] рассматривали случайную связь между хаотическими системами. Dolnik and Epstein [1996] исследовали синхронизацию двух связанных хаотических химических осцилляторов. Полной синхронизации в распределенных системах посвящены работы [Pikovsky 1984a; Yamada and Fujisaka 1984]. Частичная синхронизация в цепочке лазеров исследовалась теоретически и экспериментально в работе [Terry *et al.* 1999], см. также [Vieira 1999].

Синхронизация двух систем с пространственно-временным хаосом обсуждалась в статьях [Pikovsky and Kurths 1994; Kurths and

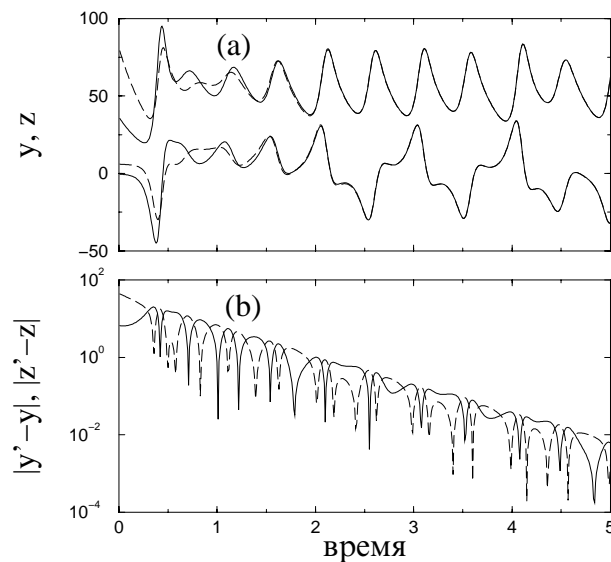


Рис. 14.5. Синхронизация системы и копии в модели Лоренца. (а) Эволюция переменных  $z$  и  $z'$  (верхняя кривая) и  $y$  и  $y'$  (нижняя кривая); копированные переменные показаны пунктиром. (б) Разности  $|y - y'|$  (сплошная линия) и  $|z - z'|$  (пунктир) убывают во времени.

Pikovsky 1995; Parekh *et al.* 1996; Sauer and Kaiser 1996; Hu *et al.* 1997; Косарев *et al.* 1997; Jiang and Parmananda 1998; Boccaletti *et al.* 1999; Grassberger 1999]. Синхронизация в клеточных автоматах рассматривалась в [Morelli and Zanette 1998; Urias *et al.* 1998; Bagnoli *et al.* 1999; Bagnoli and Rechtman 1999; Grassberger 1999].

Синхронизация системы и копии обсуждалась в работах [Pecora and Carroll 1990, 1998; Carroll and Pecora 1993a,b, 1998; Gupte and Amritkar 1993; Heagy and Carroll 1994; Tresser *et al.* 1995; González-Miranda 1996a,b; Konnur 1996; Balmforth *et al.* 1997; Boccaletti *et al.* 1997; de Sousa Vieira and Lichtenberg 1997; Duane 1997; Güémez *et al.* 1997; Kim 1997; Pecora *et al.* 1997b,c; Zonghua and Shigang 1997a,b; Carroll and Johnson 1998; Johnson *et al.* 1998; He and Vaidya 1999; Mainieri and Rehacek 1999; Matsumoto and Nishi 1999; Morgül 1999; Voss 2000]. Асимптотическая устойчивость этой синхронизации исследовалась He and Vaidya [1992] с использованием функций Ляпунова. Экспериментальная реализация этого эффекта в лазерах описана в [Sugawara *et al.* 1994]. Некоторые аспекты синхронизации копированных систем обсуждались в связи с проблемой передачи информации [Cuomo and Oppenheim 1993; Cuomo *et al.* 1993a,b; Gonzalez-Miranda 1999; Morgül and Feki 1999].

## Глава 15

# Синхронизация сложной динамики внешним воздействием

В этой главе мы опишем синхронизацию внешними силами; обсуждаемые здесь эффекты отличаются от описанных в главах 7 и 10. Содержание главы довольно неоднородно: мы обсудим системы и силы различных типов. Тем не менее, оказывается возможным установить общее для всех ситуаций свойство: синхронизация наблюдается, если собственная динамика системы подавляется и она полностью подчиняется внешней силе. Другими словами, движения в системе синхронизируются, если они становятся устойчивыми к внутренним возмущениям. Количественно это измеряется максимальным показателем Ляпунова: отрицательный показатель приводит к синхронизации (отметим, что речь идет не о поперечном или условном показателе Ляпунова, а о «каноническом» показателе Ляпунова динамической системы). Это общее правило не зависит от типа силы и от вида системы, тем не менее ряд свойств синхронизации зависит от конкретной постановки задачи. Поэтому в последующих разделах мы рассмотрим случаи периодической, шумовой и хаотической силы по отдельности. Пока же интересно отметить, что захват фазы периодических колебаний (глава 7) также можно интерпретировать как стабилизацию динамики внешней силой: асинхронное движение (в отсутствие силы или вне области синхронизации) имеет нулевой максимальный ляпуновский показатель, в то время как в синхронном

режиме он отрицателен.<sup>1</sup>

Другой важный подход, на котором мы остановимся в этой главе, состоит в исследовании чувствительности к возмущениям вынуждающего сигнала. В отличие от чувствительности к начальным условиям, которая характеризуется ляпуновским показателем, чувствительность к внешнему воздействию таких универсальных количественных характеристик не имеет. Более того, о чувствительности можно говорить только в случае воздействий, для которых возможны малые возмущения. Они существуют для хаотических и квазипериодических воздействий, поскольку в этих случаях сила задается достаточно сложной динамикой; для периодических сигналов таких возмущений нет. Мы увидим, что синхронное состояние (в описанном выше смысле) может быть чувствительно или нечувствительно к внешней силе, этим двум случаям соответствуют гладкая и негладкая (фрактальная) зависимости вынужденных переменных от вынуждающих.

## 15.1 Синхронизация периодической силой

Во многих системах хаос исчезает при приложении периодической внешней силы достаточно большой амплитуды. В этом контексте синхронизация означает, что наблюдается не хаос, а вынужденные периодические колебания. Общие свойства этой разрушающей хаос синхронизации не универсальны: обычно при очень сильном воздействии наблюдаются регулярные режимы, но их зависимость от амплитуды и частоты не подчиняется каким-либо общим законам. Во всяком случае, в вынужденной системе аттрактором является периодическая траектория, так что соотношение между вынуждающими и вынуждаемыми переменными задается гладкой функцией.

Ниже представлены результаты численного исследования системы Лоренца с периодической внешней силой

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy + \varepsilon \sin \omega t.\end{aligned}\tag{15.1}$$

<sup>1</sup> Напомним, что есть и исключения из этого общего правила. Так, в разделе 14.3 упоминался «устойчивый» (в смысле отрицательности ляпуновских показателей) пространственно-временной хаос.

Область периодических колебаний показана на рис. 15.1. Порог синхронизации лежит высоко: при амплитудах силы меньших 20 периодические режимы не наблюдаются. Два типичных устойчивых аттрактора показаны на рис. 15.2.

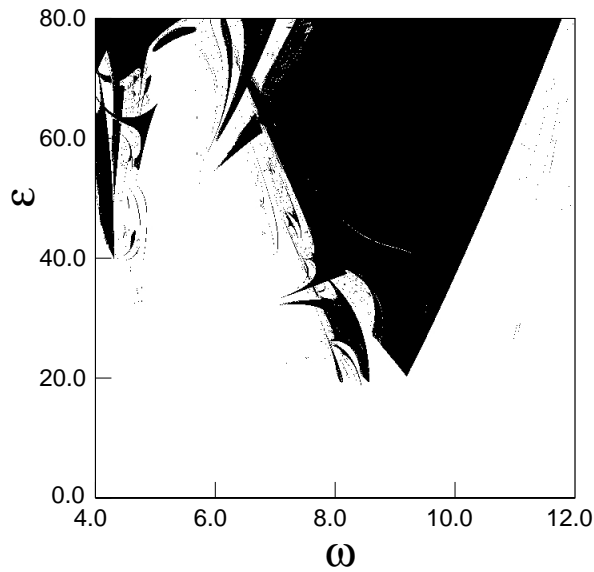


Рис. 15.1. Область периодических режимов (черные точки) в системе Лоренца с внешней силой (15.1) на плоскости параметров внешнего воздействия. Счет всегда начинался с начальных условий  $x = y = 0.001, z = 0$ , так что возможная мультистабильность (т.е. сосуществование периодических и хаотических решений) не выявлялась.

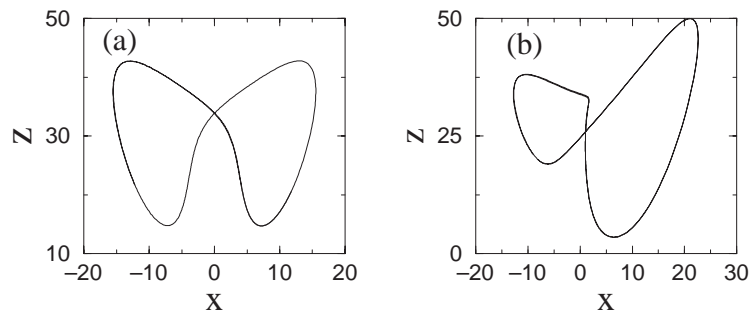


Рис. 15.2. Два периодических режима в системе Лоренца с внешней силой. (a)  $\varepsilon = 60, \omega = 10$ . (b)  $\varepsilon = 80, \omega = 4$ .

## 15.2 Синхронизация шумовым воздействием

Синхронизация внешним шумом заключается в том, что система «забывает» собственную динамику и свои начальные условия и следует за вынуждающим шумом. В одной системе переход к синхронизации не виден, но его можно наблюдать, если вместе с системой рассмотреть ее копию, т.е., если мы будем сравнивать две *идентичные* системы, возбуждаемые *одним и тем же* шумом, но начинающие движение с разных начальных условий. (Эта постановка задачи объясняет, какая устойчивость характеризуется ляпуновским показателем в системе с шумом: это устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, а не устойчивость по отношению к шуму.) При рассмотрении двух систем разница между положительным и отрицательным ляпуновским показателем легко видна: при положительном показателе траектории сохраняют зависимость от начальных условий и остаются различными, в то время как при отрицательном показателе начальные условия забываются и траектории сближаются, т.е. системы синхронизируются. Это совпадение движений в двух системах под действием общего шума тривиально, если системы линейны:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -y + \xi(t).$$

Тогда движение каждой системы состоит из затухающих свободных колебаний, зависящих от начальных условий (однородная часть), и из вынужденных колебаний, зависящих только от шума (неоднородная часть). На больших временах зависимость от начальных условий исчезает, и состояния становятся идентичными ( $x = y$ ); это видно из уравнения для разности  $x - y$ . То же самое происходит и в нелинейных системах, но задача исследования их устойчивости менее тривиальна.

Синхронизация общим шумом происходит без какого-либо прямого взаимодействия между осцилляторами и не зависит от их числа. Поэтому этот эффект может наблюдаться в сколь угодно большом ансамбле идентичных нелинейных систем, на которые действует один и тот же шум: все системы будут синхронизованы, если ляпуновский показатель отрицателен. Ниже мы рассмотрим случаи воздействия шума на периодические и хаотические колебания.

### 15.2.1 Периодические колебания под действием шума

Эффект воздействия шума на периодические колебания обсуждался выше в главе 9. Там нас интересовали свойства диффузии фазы, теперь же для нас важны характеристики устойчивости движения. Они нетривиальны, поскольку в автономном периодическом осцилляторе один ляпуновский показатель равен нулю (он соответствует фазе). При наличии внешнего шума этот показатель будет, в общем случае, ненулевым – и главный вопрос состоит в том, будет он положительным или отрицательным.

Как отмечалось в разделе 9.1, в присутствии шума простейшее уравнение для фазы имеет вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \xi(t).$$

Правая часть не зависит от фазы и поэтому ляпуновский показатель равен нулю,  $\lambda = \langle d\dot{\phi}/d\phi \rangle = 0$ . Другими словами, фаза остается нейтральной по отношению к возмущениям начальных условий. Это вырождение снимается, если вынуждающая сила зависит от фазы (ср. с (9.1)):

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, \xi(t)),$$

где  $\varepsilon$  характеризует амплитуду силы. В этой общей ситуации ляпуновский показатель будет ненулевым.

В качестве конкретного примера автоколебаний с шумом рассмотрим обобщение модели с импульсной силой, описанной в разделе 7.3.3. Там мы исследовали динамику осциллятора под действием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов (7.64). Теперь мы рассмотрим последовательность импульсов

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(t - t_n) \quad (15.2)$$

со случайными амплитудами  $\xi_n$  и случайными временами появления  $t_n$ . Отображение окружности (7.68) очевидным образом обобщается на этот случай, приводя к стохастическому отображению (для простоты считаем, что параметр  $\alpha$  равен нулю):

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega_0 T_n + \varepsilon \xi_n \cos \phi_n. \quad (15.3)$$

Из-за случайности интервалов между импульсами  $T_n$  и их амплитуд  $\xi_n$ , фаза меняется нерегулярно, так что нельзя говорить о

синхронизации или захвате фазы в обычном смысле. Мы покажем, однако, что фаза может быть привязана к внешней силе, и в этом смысле можно говорить об определенной синхронизации.

Нас интересует чувствительность фазы  $\phi_n$  по отношению к изменениям начальной фазы  $\phi_0$ . Другими словами, мы должны вычислить ляпуновский показатель:

$$\lambda = \frac{\langle \ln |d\phi_{n+1}/d\phi_n| \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{\langle \ln |1 - \varepsilon \xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (15.4)$$

Здесь  $\langle T \rangle$  – средний промежуток между импульсами. Полученная численно зависимость ляпуновского показателя от амплитуды импульсной силы  $\varepsilon$  немонотонна (рис. 15.3): при малых амплитудах показатель отрицателен, при больших – положителен.

Эти свойства показателя можно вывести аналитически. При малых  $\varepsilon$  можно разложить (15.4) в ряд по  $\varepsilon$  и получить

$$\lambda \approx \frac{1}{\langle T \rangle} \left( -\varepsilon \langle \xi \sin \phi \rangle - \frac{\varepsilon^2}{2} \langle \xi^2 \sin^2 \phi \rangle \right).$$

В общем случае, для того, чтобы выполнить усреднение, нужно знать распределение фазы. При малых  $\varepsilon$  и больших флуктуациях межимпульсных интервалов  $T_n$  это распределение почти однородно, так что первый член равен нулю, и ведущий член приводит к отрицательному ляпуновскому показателю:

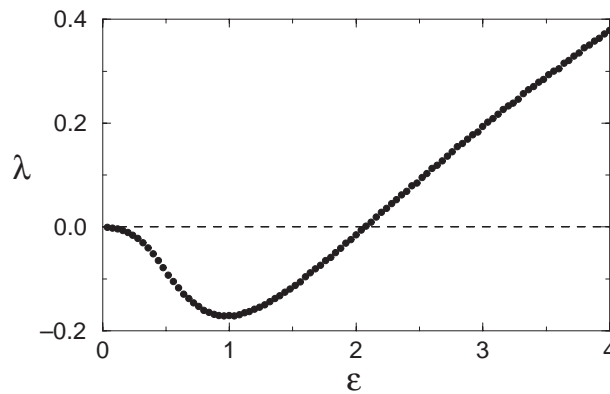


Рис. 15.3. Ляпуновский показатель  $\lambda$  стохастического отображения (15.3) в зависимости от амплитуды шума  $\varepsilon$ . Интервалы между импульсами  $\omega_0 T_n$  – независимые случайные величины, распределенные экспоненциально со средним, равным 1; амплитуды импульсов  $\xi_n$  распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией.



$$\lambda \propto -\frac{\varepsilon^2}{\langle T \rangle}.$$

Отрицательный ляпуновский показатель означает, что по прошествии определенного времени фаза осциллятора «забывает» свое начальное значение и следует за внешней силой (рис. 15.4). Этому эффекту можно дать следующее наглядное объяснение. Будем рассматривать случайную последовательность импульсов как набор периодических пачек. Каждая из пачек, согласно теории синхронизации (глава 7), приводит либо к синхронному (с отрицательным ляпуновским показателем), либо к квазипериодическому (с нулевым показателем) движению. Случайно «переключая» пачки, мы смешиваем эти два режима, получая в результате отрицательный в среднем показатель.

При большой амплитуде импульсов  $\varepsilon$ , можно использовать другое приближение,<sup>2</sup> и пренебречь постоянным членом под логарифмом в (15.4):

<sup>2</sup> Хотя при выводе (15.3) сила предполагалась малой, можно рассматривать стохастическое отображение (15.3) как самостоятельную модель и исследовать ее при всех значениях параметров.

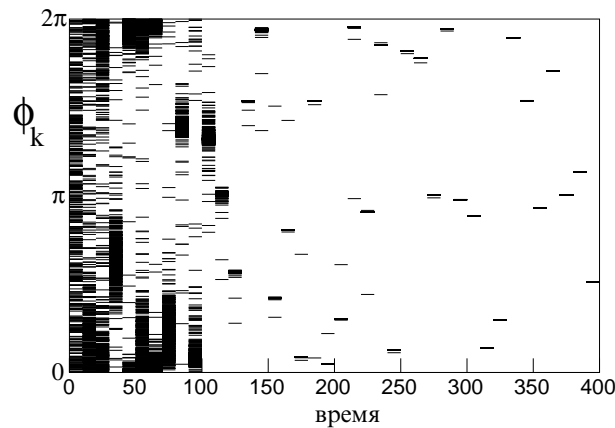


Рис. 15.4. Эволюция в ансамбле из 500 осцилляторов, подчиняющихся стохастическому отображению (15.3). Фазы показаны горизонтальными полосками для каждой десятой итерации. Статистическое распределение величин  $T_n$ ,  $\xi_n$  – как на рис. 15.3. Амплитуда силы  $\varepsilon = 0.4$  выбрана такой, чтобы ляпуновский показатель был отрицательным: все фазы, вначале распределенные равномерно, после  $\approx 300$  итераций сходятся к одному состоянию.

$$\lambda \approx \frac{\langle \ln |\varepsilon \xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle} \propto \frac{\ln \varepsilon + \langle \ln |\xi \sin \phi| \rangle}{\langle T \rangle}.$$

Отсюда следует, что ляпуновский показатель положителен при больших  $\varepsilon$ . Для одного осциллятора с внешней силой это ничего не значит. Но, если мы приготовим две копии системы с близкими начальными условиями и будем действовать на них одним и тем же шумом, то различие между состояниями систем будет расти экспоненциально, и через короткое время колебания в них будут независимыми – происходит десинхронизация.

В заключение отметим, что в математической литературе объект, возникающий при эволюции ансамбля идентичных систем под действием общего шума, называют *случайным аттрактором* [Crauel and Flandoli 1994; Arnold 1998].

### 15.2.2 Синхронизация хаотических колебаний внешним шумом

При хаосе максимальный ляпуновский показатель положителен, но под действием внешнего шума он может поменять знак. Один возможный механизм стабилизации заключается в шуме, зависящем от координат (модулированном), подобно случаю периодических колебаний, описанному в разделе 15.2.1. Другая возможность состоит в том, что шум не влияет на устойчивость непосредственно, но изменяет функцию распределения в фазовом пространстве. В результате этого некоторые «устойчивые» области в фазовом пространстве могут посещаться более часто, приводя к уменьшению ляпуновского показателя. Этот механизм работает и при аддитивном шуме. Рассмотрим для примера два одномерных отображения под действием одного и того же шума:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t)) + \xi(t), \\ y(t+1) &= f(y(t)) + \xi(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что синхронное состояние  $x(t) = y(t) = U(t)$  есть решение этих уравнений. Для определения его устойчивости, рассмотрим эволюцию малой разности  $v = x - y$ , подчиняющейся линеаризованному уравнению,

$$v(t+1) = f'(U(t))v(t). \quad (15.5)$$

Это уравнение в точности совпадает с линеаризованным уравнением для возмущений в одном отображении, и рост величины  $v$  определяется ляпуновским показателем

$$\lambda = \langle \ln |f'(U)| \rangle. \quad (15.6)$$

Усреднение в (15.6) производится по инвариантной мере в отображении с шумом, а оно зависит от интенсивности последнего. Поэтому при изменении шума и/или параметров отображения может наблюдаться переход ляпуновского показателя от положительных значений к отрицательным, т.е. переход от асинхронного режима к синхронному.

Подчеркнем, что (15.5) близко к уравнению (13.10), описывающему линейную стадию синхронизации связанных автономных хаотических отображений. Таким образом, вся статистическая теория, развитая в разделе 13.3, справедлива и для систем с шумом. На пороге синхронизации наблюдается модуляционная перемежаемость со свойствами, описанными в разделе 13.3. В частности, численная ловушка, описанная в разделе 13.3, существует и для систем с общим шумом: даже если ляпуновский показатель положителен, две (или более) системы могут выглядеть при численных расчетах синхронными, если компьютерные представления их состояний в какой-то момент совпали (т.е., если разность состояний меньше, чем точность представления чисел в компьютере). Этот эффект, конечно, исчезает, если системы не идентичны.

В отличие от чисто детерминированного случая мы не можем проследить за топологическими свойствами аттракторов в фазовом пространстве, как это было сделано в разделе 13.4. В самом деле, шум размывает топологическую структуру детерминированных систем (периодические орбиты и т.д.). Нетривиальные топологические свойства могут наблюдаться при хаотической силе, см. раздел 15.3.1.

## 15.3 Синхронизация хаотических колебаний хаотической силой

### 15.3.1 Полная синхронизация

Одна возможная реализация хаотической силы уже обсуждалась выше в главе 14 при рассмотрении однонаправленной связи. Перепишем систему с оператором связи (14.3) в виде

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad (15.7)$$

$$y(t+1) = (1-\varepsilon)f(y(t)) + \varepsilon f(x(t)). \quad (15.8)$$

Хаотическая сила, генерируемая отображением (15.7), действует на систему (15.8) так, что возможна полная синхронизация  $x = y$ .

Устойчивость синхронного режима может быть исследована на базе теории, развитой в главах 13 и 14. При экспериментальной реализации не обязательно создавать две идентичные системы: достаточно записать сигнал, генерируемый одной системой, и использовать его как силу (см. [Tsukamoto *et al.* 1996, 1997]). Синхронизацию легко идентифицировать по совпадению генерируемого процесса с внешней силой.

### 15.3.2 Обобщенная синхронизация

Полная синхронизация при хаотическом воздействии возможна только в системах, обладающих определенной симметрией, так что возможно равенство переменных в вынуждающей и в вынуждаемой системах. Если такая симметрия отсутствует, то вынуждаемая система все же может следовать за силой, но в более слабом смысле. Рассмотрим общий случай однонаправленной связи:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (15.9)$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \quad (15.10)$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  вектора. Переменные  $\mathbf{x}$  описывают вынуждающую систему, а переменные  $\mathbf{y}$  – вынуждаемую. Мы не предполагаем никакой симметрии между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , более того, размерности этих векторов могут быть различны. Режим, в котором состояние вынуждаемой системы  $\mathbf{y}$  полностью определяется состоянием вынуждающей системы, называют **обобщенной синхронизацией**. На математическом языке предполагается существование однозначного отображения из  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x}). \quad (15.11)$$

Технически иногда более удобно установить отображение между  $\mathbf{y}(t+1)$  и  $\mathbf{x}(t)$ , записывая  $\mathbf{y}(t+1) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}(t))$  (см., например, рис. 15.5 ниже), потому что эти переменные непосредственно связаны через (15.10). Если отображение (15.9) обратимо, такая запись эквивалентна определению (15.11).

Другой способ описать обобщенную синхронизацию состоит в копировании вынуждаемой системы. В этом случае мы дополняем уравнения (15.9) и (15.10) до системы

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\mathbf{y}'(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}').$$

Подобная система может рассматриваться в контексте синхронизации системы и копии (раздел 14.4): при устойчивом отклике наблюдается симметричное решение  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ .

### Негладкая обобщенная синхронизация

Уравнения (15.10) описывают динамику вынуждаемой системы; ясно, что состояние  $\mathbf{y}$  следует за силой  $\mathbf{x}$  независимо от начальных условий  $\mathbf{y}(0)$  только, если динамика  $\mathbf{y}$  устойчива, т.е. максимальный ляпуновский показатель в подсистеме  $\mathbf{y}$  отрицателен. Это условие необходимо, но не достаточно. Действительно, может наблюдаться мультистабильность по  $\mathbf{y}$ , т.е. одной траектории  $\mathbf{x}(t)$  может соответствовать два (или больше) устойчивых отклика  $\mathbf{y}(t)$ . Другая особенность состоит в том, что устойчивость по  $\mathbf{y}$  может обеспечить существование функции  $\mathbf{H}$ , но не ее гладкость. Как мы увидим, функция  $\mathbf{H}$  может быть фрактальной.

Продемонстрируем это на примере одномерной<sup>3</sup> вынуждаемой системы с отрицательным ляпуновским показателем  $\lambda_y$ . Сравним, следуя Паоли и др. [Paoli *et al.* 1989b], ляпуновские размерности<sup>4</sup> аттрактора в вынуждающей и полной (т.е. вынуждаемой плюс вынуждающей) системах; мы обозначим их соответственно  $D_x^{(L)}$  и  $D_{xy}^{(L)}$ . При гладком взаимоотношении между  $y$  и  $x$  размерность полной системы должна быть такая же, как в вынуждающей; если  $D_{xy}^{(L)} > D_x^{(L)}$ , то взаимоотношение негладкое. Поскольку связь однонаправленная, ляпуновские показатели  $\lambda_j$  вынуждающей системы не зависят от вынужденных колебаний, поэтому  $D_{xy}$  не может быть меньше, чем  $D_x$ . Ляпуновская размерность задается формулой Каплана–Йорке [Kaplan and Yorke 1979]:

$$D_x^{(L)} = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|} \sum_{j=1}^D \lambda_j, \quad (15.12)$$

где ляпуновские показатели отсортированы в убывающем порядке, и целая часть  $D$  размерности определяется как наибольшее целое число, такое, что

$$\sum_{j=1}^D \lambda_j > 0.$$

<sup>3</sup> Легко видеть, что точно так же исследуется и вынуждаемая система произвольной размерности.

<sup>4</sup> Обсуждение ляпуновских размерностей можно найти, например, в книгах [Шустер 1988; Ott 1992; Кузнецов 2001].

В полной системе размерность определяется показателями  $\lambda_j$  и  $\lambda_y$ . Поскольку только первые  $\mathcal{D}+1$  ляпуновские показатели фигурируют в (15.12), то, если  $\lambda_y < \lambda_{\mathcal{D}+1}$ , то  $D_{xy}^{(L)} = D_x^{(L)}$ . Пусть теперь  $\lambda_{\mathcal{D}} > \lambda_y > \lambda_{\mathcal{D}+1}$ . Тогда

$$D_{xy}^{(L)} = \mathcal{D} + \frac{1}{|\lambda_y|} \sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \lambda_j > D_x^{(L)}.$$

Размерность возрастает еще больше, если  $\lambda_{\mathcal{D}} < \lambda_y$ . Это увеличение размерности при воздействии одной системы на другую означает, что отклик  $y$  – не гладкая функция от  $\mathbf{x}$ , иначе размерность не возрастала бы. Таким образом, обобщенная синхронизация с гладким соотношением (15.11) может наблюдаться только при достаточно сильной устойчивости вынужденных движений.

Из сказанного выше следует, в частности, что, если вынуждающая хаотическая система есть одномерное отображение (например, логистическое или типа тент), то функция  $\mathbf{H}$  всегда фрактальна. Действительно, одномерное отображение можно рассматривать как предельный случай двумерного отображения, отрицательный ляпуновский показатель которого стремится к  $-\infty$ . Поэтому такое отображение имеет ляпуновские показатели  $\lambda_1, -\infty$ . Формула Каплана–Йорке для полной системы дает  $D_{xy}^{(L)} = \min(2, 1 + \lambda_1/|\lambda_y|)$ , где  $\lambda_y$  – максимальный показатель вынужденных движений; эта размерность больше единицы. Следовательно, чтобы наблюдать нетривиальный переход от гладких к негладким функциям  $\mathbf{H}$ , нужно иметь как минимум двумерное вынуждающее хаотическое отображение.

#### Пример гладкой и негладкой обобщенной синхронизации

Функция  $\mathbf{H}$  может быть фрактальна даже в таком простом случае, когда подсистема (15.10) линейна:

$$y(t+1) = \gamma y(t) + q(\mathbf{x}(t)). \quad (15.13)$$

Отклик устойчив (т.е. выполняется условие (15.11)), если  $\lambda_y = \ln |\gamma| < 0$ ; для определенности будем считать, что  $\gamma > 0$ .

Детальный анализ этой задачи при обобщенном преобразовании пекаря (см. (15.16) ниже) в качестве вынуждающей силы и при линейном отображении (15.13) в качестве отклика был выполнен Раоли *et al.* [1989a]. В этой работе был найден спектр особенностей отклика (т.н.  $f(\alpha)$ -спектр) и описано его изменение при вариации коэффициента затухания  $\gamma$  вынужденных движений.  $f(\alpha)$ -спектр

есть преобразование Лежандра от обобщенных размерностей (детали можно найти в [Badii and Politi 1997]). Из результатов Паоли и др. следует, что при малых  $\gamma$  размерности не меняются. С ростом  $\gamma$ , при превышении им наименьшего коэффициента сжатия преобразования пекаря, некоторые обобщенные размерности отклика начинают отличаться от размерностей вынуждающей системы. Это указывает на негладкость функции  $\mathbf{H}$ . При больших  $\gamma$  отличаются уже все размерности.

Ниже мы изложим упрощенный вариант теории [Paoli *et al.* 1989a], следуя работе [Hunt *et al.* 1997]. Начнем с итерации уравнения (15.13)

$$\begin{aligned} y(t+1) &= q(\mathbf{x}(t)) + \gamma y(t) \\ &= q[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}(t+1))] + \gamma \{ \gamma y(t-1) + q[\mathbf{f}^{-2}(\mathbf{x}(t+1))] \} = \dots, \end{aligned}$$

дающей формальное выражение функции  $H$ , связывающей  $y(t+1)$  и  $\mathbf{x}(t+1)$ :

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{j-1} q(\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})). \quad (15.14)$$

Ясно, что эта функция существует, если  $\gamma < 1$  и сила  $q$  ограничена. Для проверки гладкости продифференцируем (15.14) и получим

$$\nabla H = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{j-1} J[\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})] \nabla q(\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})), \quad (15.15)$$

где  $J$  – якобиан. Достаточное условие существования производной в точке  $\mathbf{x}$  – это сходимость ряда (15.15), что выполняется если значения  $\gamma^j \|\mathbf{J}\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})\|$  убывают в геометрической прогрессии. Наиболее опасны для сходимости большие значения якобиана  $\|\mathbf{J}\mathbf{f}^{-j}(\mathbf{x})\|$ , которые вычисляются по *обратным* итерациям отображения (15.9). Это соответствует малым значениям производной, вычисленной при итерациях *вперед* по времени, т.е. по наиболее устойчивому направлению отображения (15.9). Снова мы видим, что гладкость функции  $H$  определяется соотношением между ляпуновским показателем вынужденных движений  $\lambda_y = \ln \gamma$  и максимальным по модулю из отрицательных показателей вынуждающей системы (15.9).

Предположим, что вынуждающее отображение (15.9) двумерно и имеет один положительный и один отрицательный ляпуновский показатель; последний мы обозначим  $\lambda_x$ . Тогда из (15.15) следует, что функция  $H$  непрерывна «в среднем» (т.е., что производная существует почти во всех точках), если

$$\lambda_y - \lambda_x < 0,$$

т.е., если средняя степень сжатия вынужденных движений больше, чем средняя степень сжатия в вынуждающей системе. Нетрудно видеть, что это как раз условие неувеличения ляпуновской размерности согласно (15.12).

Для более детального анализа удобно определить зависящий от  $(\mathbf{x}, y)$  ляпуновский показатель, по аналогии с использованным в главе 13 подходом, основанном на термодинамическом формализме. Определим так называемый ляпуновский показатель по предыстории: для вынуждающей системы запишем

$$\|J\mathbf{f}^{-T}(\mathbf{x})\| \propto e^{-T\Lambda_x(\mathbf{x})},$$

а для вынужденных движений –

$$\frac{dy(t)}{dy(t-T)} \propto e^{T\Lambda_y(\mathbf{x}, y)}$$

(в частном случае (15.13),  $\Lambda_y = \ln \gamma$ , но в общей ситуации показатель зависит от координат). Тогда функция  $H$  дифференцируема в точке  $(\mathbf{x}, y)$ , если

$$\Lambda_y(\mathbf{x}, y) - \Lambda_x(\mathbf{x}) < 0.$$

Если отрицательный ляпуновский показатель  $\Lambda_x(\mathbf{x})$  отображения (15.9) меняется от точки к точке, то функция  $H$  может быть дифференцируемой в некоторых точках и фрактальной в других.

Переход от гладкой к негладкой обобщенной синхронизации проиллюстрирован на рис. 15.5. Здесь вынуждающей системой служит двумерное обобщенное преобразование пекаря, определенное на единичном интервале  $0 \leq x_1, x_2 < 1$ ,

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta x_1(t) \\ x_2(t)/\alpha \end{bmatrix} & \text{если } x_2(t) < \alpha, \\ \begin{bmatrix} \beta + (1-\beta)x_1(t) \\ (x_2(t) - \alpha)/(1-\alpha) \end{bmatrix} & \text{если } x_2(t) > \alpha. \end{cases} \quad (15.16)$$

Оба параметра  $\alpha$  и  $\beta$  не превышают  $1/2$ . Вынуждаемая система линейна:

$$y(t+1) = \gamma y(t) + \cos(2\pi x_1(t)). \quad (15.17)$$

Легко видеть, что неустойчивое направление в вынуждающей системе есть  $x_2$ , а устойчивое направление –  $x_1$ . Естественная мера равномерна по направлению  $x_2$  и сложным образом меняется по  $x_1$ ,



если только  $\alpha \neq \beta$ . Чтобы вычислить ляпуновский показатель по предыстории в данной точке  $x_1, x_2$ , нужно определить прообразы  $x_1, x_2$ . Обозначая

$$a_- = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_-}{T}, \quad a_+ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_+}{T},$$

где  $T_-$  ( $T_+$ ) – число прообразов с  $x_2 < \alpha$  ( $x_2 > \alpha$ ), получим для показателя по предыстории

$$\Lambda(x_1, x_2) = a_- \ln \beta + a_+ \ln(1 - \beta).$$

Значения  $a_{\pm}$  различны для разных траекторий; их можно определить, используя метод символической динамики. Естественное символическое описание состоит в присвоении двух символов областям

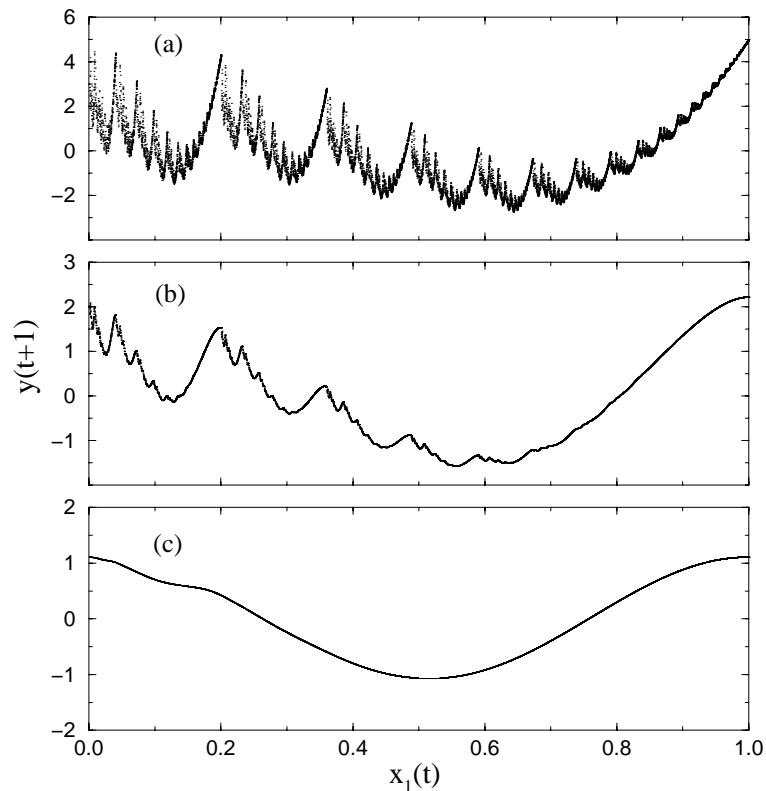


Рис. 15.5. Три типа обобщенной синхронизации в системе (15.16) и (15.17), при  $\alpha = 0.1$  и  $\beta = 0.2$ . (а)  $\gamma = 0.8$ ; кривая  $\tilde{H}$  фрактальна. (б)  $\gamma = 0.6$ ; кривая не дифференцируема в плотном множестве точек, но дифференцируема «в среднем». (с)  $\gamma = 0.1$ ; гладкая кривая.

$x < \alpha$  и  $x > \alpha$ , при этом разрешены все возможные последовательности этих символов, поэтому существуют траектории со всеми возможными значениями  $0 \leq a_{\pm} \leq 1$ . Это означает, что

$$\ln \beta \leq \Lambda(x_1, x_2) \leq \ln(1 - \beta).$$

Так как наиболее вероятные значения  $a_{\pm}$  есть  $a_- = \alpha$ ,  $a_+ = 1 - \alpha$ , то средний отрицательный ляпуновский показатель отображения равен

$$\lambda_x = \alpha \ln \beta + (1 - \alpha) \ln(1 - \beta).$$

Ляпуновский показатель вынужденных движений постоянен ( $\lambda_y = \ln \gamma$ ). Таким образом, согласно формуле Каплана–Йорке, ляпуновская размерность всей системы больше, чем вынуждающей, если  $|\lambda_x| > |\ln \gamma|$ . Однако даже при выполнении этого неравенства в области

$$|\lambda_x| < |\ln \gamma| < |\ln \beta|,$$

существуют точки  $x_1, x_2$ , для которых ляпуновский показатель по предыстории  $\Lambda$  больше, чем  $\ln \gamma$ . В этих точках (они всюду плотны, хотя их мера равна нулю) функция  $H$  не дифференцируема. Различные случаи обобщенной синхронизации в системе (15.16) и (15.17) показаны на рис. 15.5.

### 15.3.3 Обобщенная синхронизация квазипериодической силой

Интересно отметить, что переход от гладкой к негладкой обобщенной синхронизации возможен не только при хаотической внешней силе, но и при квазипериодической. В последнем случае вынуждающей динамике соответствует тор в фазовом пространстве. Если вынужденные движения тоже квазипериодические, то и в полном фазовом пространстве траектория лежит на торе. Но есть и другая возможность – когда вынужденные движения, хотя и являются устойчивыми, принадлежат *странному нехаотическому аттрактору*. У странного нехаотического аттрактора максимальный ляпуновский показатель отрицателен (поэтому он нехаотический), но в фазовом пространстве он образует фрактал (отсюда – странный). Аналогично случаю негладкой обобщенной синхронизации хаоса, соотношение между вынуждающей и вынуждаемой системами для странного нехаотического аттрактора весьма нетривиально: функциональное соотношение между квазипериодической силой и вынужденным движением либо задается фрактальной кривой, либо вообще не существует.

Для иллюстрации странного нехаотического аттрактора мы выбрали логистическое отображение с квазипериодической силой

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \omega, \\y(t+1) &= a - y^2(t) + b \cos 2\pi x(t).\end{aligned}\quad (15.18)$$

Здесь  $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$  есть иррациональная частота внешней силы. На рис. 15.6 показаны случаи с гладким и с фрактальным соотношением между  $y$  и  $x$ . В обоих случаях ляпуновский показатель вынужденных движений отрицателен, так что режим на рис. 15.6b – нехаотический.

## 15.4 Библиографические заметки

Численному исследованию различных хаотических систем с внешней силой посвящены работы [Aizawa and Uezu 1982; Анищенко и Астахов 1983; Кузнецов и др. 1985; Безаева и др. 1987; Ланда и Перминов 1987; Ланда и др. 1989; Dykman *et al.* 1991; Rosenblum 1993; Franz and Zhang 1995; Tamura *et al.* 1999]. Экспериментальное исследование соответствующих режимов в лампе обратной волны выполнено Безручко [1980] и Безручко и др. [1981].

Синхронизация идентичных нелинейных систем общим шумом описана в [Pikovsky 1984b; Пиковский 1984a; Pikovsky 1992; Yu *et al.* 1990]. Наше изложение следует работам [Pikovsky 1984b; Пиковский 1984a]. Зависимость максимального ляпуновского показателя от шума в хаотических системах исследовалась в [Matsumoto and Tsuda

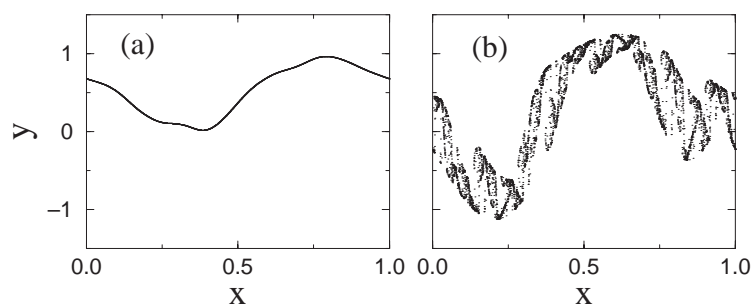


Рис. 15.6. Аттракторы в логистическом отображении с квазипериодической силой (15.18). (a) При  $\varepsilon = 0.3$  и  $a = 0.9$  вынужденное движение  $y$  есть гладкая функция от  $x$ , поэтому можно говорить о гладкой обобщенной синхронизации между  $x$  и  $y$ . (b) При  $\varepsilon = 0.45$  и  $a = 0.8$  наблюдается фрактальный странный нехаотический аттрактор: хотя вынужденные движения следуют за силой, соотношение между переменными  $y$  и  $x$  негладкое.

1983]. Примеры хаотических систем под действием общего шума можно найти в [Maritan and Banavar 1994; Khoury *et al.* 1996, 1998; Ali 1997; Longa *et al.* 1997; Sánchez *et al.* 1997; Minai and Anand 1998, 1999a; Shuai and Wong 1998]. В частности, в работах [Maritan and Banavar 1994; Shuai and Wong 1998] из-за конечной точности вычислений наблюдалась «ложная» синхронизация, обсуждение этого артефакта можно найти в [Pikovsky 1994; Herzel and Freund 1995]. Эксперименты с действием шума на электронные устройства описаны в [Khoury *et al.* 1998].

Однонаправленная связь хаотических систем изучалась теоретически и численно в [Pecora and Carroll 1991; Rulkov *et al.* 1995; Abarbanel *et al.* 1996; Kapitaniak *et al.* 1996; Kocarev and Parlitz 1996; Konnur 1996; Pyragas 1996, 1997; Rulkov and Suschik 1996; Ali and Fang 1997; Brown and Rulkov 1997a,b; Hunt *et al.* 1997; Liu and Chen 1997; Parlitz *et al.* 1997; Carroll and Johnson 1998; Johnson *et al.* 1998; Baker *et al.* 1999; Liu *et al.* 1999; Minai and Anand 1999b; Parlitz and Kocarev 1999; Santoboni *et al.* 1999]. В нашем изложении гладкой и негладкой обобщенной синхронизации мы следуем работам [Paoli *et al.* 1989a; Hunt *et al.* 1997] и [Stark 1997], см. также статьи [Kaplan *et al.* 1984; Badii *et al.* 1988; Mitschke *et al.* 1988; Paoli *et al.* 1989b; Mitschke 1990; Pecora and Carroll 1996], где рассматривался отклик линейных систем на хаотическую силу, а также [de Sousa Vieira and Lichtenberg 1997]. Экспериментальные наблюдения обобщенной синхронизации можно найти в [Peterman *et al.* 1995; Abarbanel *et al.* 1996; Gauthier and Bienfang 1996; Rulkov and Suschik 1996; Tsukamoto *et al.* 1997; Tang *et al.* 1998b]. В статьях [Peng *et al.* 1996] и [Tamasevicius and Čenys 1997] обсуждается возможность синхронизации гиперхаоса одним скалярным сигналом.

Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодической силой были введены в [Grebogi *et al.* 1984] и с тех пор исследовались теоретически [Romeiras *et al.* 1987; Ding *et al.* 1989; Brindley and Kapitaniak 1991; Heagy and Hammel 1994; Pikovsky and Feudel 1994, 1995; Kuznetsov *et al.* 1995; Keller 1996; Lai 1996b; Nishikawa and Kaneko 1996; Yalcinkaya and Lai 1997; Prasad *et al.* 1998 и ссылки в них же] и экспериментально [Ditto *et al.* 1990; Zhou *et al.* 1992; Yang and Bilimgut 1997; Zhu and Liu 1997].